Chapitre 1

Théorie de la stabilité de Lyapunov

1.1 Introduction

Nous avons vu qu'un point singulier pour lequel la matrice du linéarisé a des valeurs propres à partie réelle négative est asymptotiquement stable. Si certaines des valeurs propres ont des parties réelles positives, le point est instable. Mais qu'en est-il dans les autres cas ? Beaucoup de situations peuvent se produire et il n'existe pas de méthode générale permettant de conclure dans tous les cas, mais plutôt un certain nombre de méthodes ad hoc. La méthode de Lyapunov en est une. Elle est très importante parce qu'elle permet de conclure dans plusieurs cas où les autres méthodes ne fonctionnent pas. De plus, elle permet d'évaluer la taille du bassin d'attraction d'une singularité, ce que ne permet pas le critère du signe des parties réelles des valeurs propres. L'idée géométrique est très simple. Commençons par quelques définitions.

DÉFINITION 1

1. *Un point singulier* X_0 *d'un champ de vecteurs* $\dot{X} = \nu(X)$ *défini sur un ouvert* U *est* stable *si, pour tout voisinage* V *de* x_0*, il existe un voisinage* W *de* x_0 *tel que si* $X_1 \in W$*, alors* $\phi^t(X_1) = \Phi(X_1, t) \in V$ *pour* $t \geq 0$.
2. *Un point singulier* X_0 *d'un champ de vecteurs* $\dot{X} = \nu(X)$ *défini sur un ouvert* U *est* asymptotiquement stable *s'il existe un voisinage* V *de* X_0 *tel que, pour tout* $X_1 \in V$ *alors,* $\lim_{t\to+\infty} \phi^t(X_1) = X_0$.
3. *Soit* X_0 *un point singulier asymptotiquement stable d'un champ de vecteurs* $\nu(X)$ *défini sur un domaine* U. *Le* bassin d'attraction *de* X_0 *est l'ensemble des points* $X_1 \in U$ *tels que* $\lim_{t\to+\infty} \phi^t(X_1) = X_0$.

EXEMPLE 1 *L'origine dans le système*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x, \end{aligned}$$

est stable. En effet, $\dot{r} = 0$*. Donc, si on prend* $V = W = B(0, r)$*, toute trajectoire issue de* $x_1 \in W$ *reste toujours dans* V*. Par contre les trajectoires sont incluses dans des cercles centrés en* 0*. Le point n'est donc pas asymptotiquement stable.*

2. *L'origine dans le système*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x - y(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

est asymptotiquement stable. En effet, il est aisé de vérifier que $\dot{r} = -r^3$*. Dans ce cas-ci on peut intégrer explicitement* $\dot{r} = -r^3$ *et vérifier que* $\lim_{t \to +\infty} = 0$*. Ceci, c'est l'approche analytique. Il y a une deuxième manière, plus géométrique de conclure. Cette deuxiéme se généralisera en la méthode de Lyapunov.*

Considérons la fonction $F(x, y) = x^2 + y^2 = r^2$*. Ses courbes de niveau sont des cercles concentriques autour de l'origine. Regardons comment est dirigé le champ en un point d'une telle courbe. On voit qu'il est dirigé vers l'intérieur de la courbe. En effet, considérons* $\frac{d}{dt} F(x(t), y(t))$*. Par la règle de dérivation en chaîne,*

$$\frac{d}{dt} F(x(t), y(t)) = \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} = -r^4 < 0$$

partout, sauf à l'origine. Aussi, le champ est dirigé dans la direction vers laquelle F *décroît, donc vers l'intérieur de la courbe.*

Cette approche géométrique nous a évité d'intégrer une équation différentielle. De plus on voit que l'expression exacte de la fonction $F(x, y)$ n'a pas d'importance tant que ses courbes de niveau sont concentriques autour de l'origine. De plus, l'idée peut fonctionner en dimension supérieure. Cette approche est précisément la méthode de Lyapunov.

THÉORÈME 1 *On considère un champ de vecteurs* $v(X)$ *de classe* C^1 *défini sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *et* X_0 *un point singulier de* v*. Soit* V *un voisinage de* X_0 *et* $F : V \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1 *telle que*

- F *ait un minimum local strict en* X_0 *;*
- $\dot{F} = \langle \nabla F(X), v(X) \rangle \leq 0$ *pour tout* $X \in V$*.*

Alors, X_0 *est stable. Si, de plus* $\dot{F} < 0$ *pour* $X \in V \setminus \{X_0\}$*, alors* X_0 *est asymptotiquement stable.*

PREUVE Soit r tel que la boule fermée $\overline{B(X_0, r)}$ soit incluse dans V et soit L le minimum de F sur le cercle $C(X_0, r)$. Alors $L > F(X_0)$. On considère $W = \{X \in V \mid F(X) < L\}$. Bien sûr, $W \subset V$. De plus si $X_1 \in W$, alors $F(\phi^t(X_1)) \leq F(X_1)$ pour tout $t \geq 0$ puisque F décroît le long des trajectoires. Donc $F(\phi^t(X_1)) \in W \subset V$ pour tout $t \geq 0$. On en conclut que X_0 est stable.

Supposons maintenant qu'on ait l'hypothèse plus forte que $\dot{F} < 0$. Puisque l'ensemble des points $\{\phi^t(X_1) \mid t \geq 0\}$ est borné, il contient un point d'accumulation X_2. Montrons que $X_2 = X_0$. En effet, il existe $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \ldots$ tels que $\phi^{t_n}(X_1) \to X_2$, où $t_n \to \infty$. De plus, si $X_n = \phi^{t_n}(X_1)$, alors la suite $F(X_n)$ est strictement décroissante vers un minimum $m = F(X_2)$.

Si $m = F(X_0)$, alors $X_2 = X_0$. Sinon, considérons la trajectoire issue de X_2. Alors, F décroît le long de cette trajectoire. Donc, pour $T > 0$, alors $F(\phi^T(X_2)) = m' < m = F(X_2)$. Soit $\epsilon < \frac{m-m'}{2}$. Par continuité des solutions par rapport aux conditions initiales, il existe un voisinage W' de X_2 tel que si $X_3 \in W'$, alors $|F(\phi^T(X_3)) - F(\phi^T(X_2))| < \epsilon$. On prend un x_3 particulier de la forme $\phi^{t_n}(X_1)$. Alors, $F(\phi^{T+t_n}(X_1)) < m$. Mais, il existe $t_m > T + t_n$. Comme F décroît le long des trajectoires, $F(\phi^{T+t_n}(X_1)) > F(\phi^{t_m}(X_1)) \geq m$. Contradiction. □

La fonction F du théorème est appelée *fonction de Lyapunov*.

Comme on le voit, la méthode est puissante, mais il n'est pas toujours facile de trouver une fonction de Lyapunov. C'est une question de flair.

EXEMPLE 2 *ex :lasalle Considérons le champ*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x^3 - x^2 y. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Si l'on exclut le terme x^2y on a un système hamiltonien de fonction de Hamilton $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4}$. Ceci suggère de voir si cette fonction n'est pas une fonction de Lyapunov pour le système total. C'est le cas puisque

$$\dot{H} = -x^2 y^2 \leq 0.$$

Donc, on peut conclure par le théorème précédent que l'origine est stable. Mais on voit bien que $\dot{H}$ ne s'annule que sur les axes et qu'ailleurs il est partout négatif. Ceci suggère qu'on peut espérer montrer que l'origine est asymptotiquement stable. Le théorème de Lyaounov ne suffit plus, mais Lassalle a montré des raffinements plus puissants. En voici un.

THÉORÈME 2 *On considère un champ de vecteurs $\nu(X)$ de classe C^1 défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et X_0 un point singulier de ν. Soit V un voisinage de X_0 et $F : V \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que*
- *F ait un minimum local strict en X_0 ;*
- *$\dot{F} = \langle \nabla F(X), \nu(X) \rangle \geq 0$ pour tout $X \in V$.*

Alors, X_0 est stable. Si, de plus $\dot{F} < 0$ pour $X \in V \setminus \{X_0\}$, alors X_0 est asymptotiquement stable.

1.2 Les raffinements de la théorie par LaSalle

THÉORÈME 3 *On considère un champ de vecteurs $\nu(X)$ de classe C^1 défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit K un sous-ensemble compact positivement invariant. Soit V un ouvert contenant K et $F : V \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\dot{F} = \langle \nabla F(X), \nu(X) \rangle \leq 0$ pour tout $X \in V$. Soit E l'ensemble des points de K sur lequel $\dot{F}(X) = 0$. Soit M le plus grand sous-ensemble invariant de E. Alors toute solution commençant dans K a son ensemble ω-limite dans M.*

Soit $X(t) = \phi^t(X_1)$ une solution commençant en $X_1 \in K$. Comme $F(X)$ est continue sur K, elle est bornée inférieurement. De plus $F(X(t))$ est décroissante et tend donc vers une limite c quand $t \to +\infty$. L'ensemble ω-limite Γ de $X(t)$ est contenu dans K, puisque K est fermé. Puisque F est continue, nécéssairement F(X)=c sur Γ. De plus Γ est invariant. Donc, $\dot{F} = 0$ sur Γ et $\Gamma \subset M$. □

Revenons sur l'exemple **??**

EXEMPLE 3 *ex :lasalle2 On conidère le champ* (1.1). *Un sous ensemble compact positivement orienté est par exemple donné par* $K = \{(x, y) \mid H(x, y) \leq R\}$. *On a bien* $\dot{H} = -x^2y^2 \leq 0$ *sur* K.

$$E = \{(x, y) \in K \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\}.$$

En $(x, 0) \neq (0, 0)$ *on a* $\dot{y} = -x^3 \neq 0$. *Donc, la trajectoire issue de* $(x, 0) \in E$ *n'est pas incluse dans* E. *De même, en* $(0, y) \neq (0, 0)$ *on a* $\dot{x} = y \neq 0$. *Donc, la trajectoire issue de* $(0, y) \in E$ *n'est pas incluse dans* E. *Donc, le plus grand sous-ensemble invariant de* E *est* $M = \{(0, 0)\}$. *Par le théorème de LaSalle, toute solution commençant dans* K *a son ensemble* ω*-limite en* $(0, 0)$ *et donc, l'origine est asymptotique stable. Remarquons que pour cet exemple, si* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *on peut prendre* $R > H(x, y)$ *arbitrairement grand et conclure que* (x, y) *est dans le bassin d'attraction de l'origine. On dira que l'origine est* globalement asymptotiquement stable.

EXEMPLE 4 *On revient sur le système de Lorenz*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz, \\ \dot{z} &= -\beta z + xy, \end{aligned} \tag{1.2}$$

étudié à l'exemple **??**. *on a vu que l'origine est asympotiquement stable pour* $\rho < 1$, *instable pour* $\rho > 1$ *et on n'a pu conclure si* $\rho = 1$. *Dans le cas* $\rho < 1$ *notre étude n'a pas révélé la taille du bassin d'attraction. En utilisant une fonction de Lyapunov appropriée, on pourra conclure que l'origine est globalement asymptotiquement stable pour* $\rho \neq 1$. *Essayons une fonction* $F(x, y) = ax^2 + by^2 + cz^2$ *où* $a, b, c > 0$.

$$\begin{aligned} \dot{F} &= 2ax\sigma(y - x) + 2by(\rho x - y - xz) + 2cz(-\beta z + xy) \\ &= 2\left[-a\sigma x^2 - by^2 - c\beta z^2 + xy(a\sigma + b\rho) + xyz(c - b)\right]. \end{aligned}$$

On prend donc $b = c$. *En multipliant* F *par une constante on peut normaliser* $a = 1$. *Alors,*

$$\frac{\dot{F}}{2} = [-\sigma x^2 - by^2 + xy(\sigma + b\rho)] - b\beta z^2.$$

On doit choisir b *pour que la forme quadratique* $Q(x, y) = -\sigma x^2 - by^2 + xy(\sigma + b\rho)$ *soit définie positive. Il faut donc que*

$$\Delta = (\sigma + b\rho)^2 - 4\sigma b < 0.$$

Voyons que le choix $b = \sigma$ *convient. En effet,*

$$\Delta|_{b=\sigma} = \sigma^2[(1+\rho)^2 - 4] = \sigma^2[\rho^2 + 2\rho - 3] = \sigma^2(\rho - 1)(\rho + 3),$$

et donc, $\Delta|_{b=\sigma} < 0$ *pour* $\rho < 1$. *En conclusion, pour* $F(x, y) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$, *on a* $\dot{F} < 0$ *si* $\rho < 1$ *et l'origine est asymptotiquement stable. Regardons maintenant ce qui se passe pour* $\rho = 1$. *Alors,*

$$\frac{\dot{F}}{2} = -\sigma(x - y)^2 - \beta z^2 \leq 0.$$

Le théorème de Lyapunov permet de conclure que l'origine est stable. Utilisons maintenant le théorème de LaSalle. $E = \{(x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. *Soit* $(x, x, 0) \neq (0, 0, 0)$ *un point de* E. *Pour montrer que sa trajectoire n'est pas dans* E *on montre que* $\dot{(x-y)}|_{(x,x,0) \neq 0}$. *En effet,* $\dot{z}|_{\rho=1, y=x, z=0} = x^2 \neq 0$. *Donc,* $M = \{(0, 0, 0)\}$ *est le plus grand sous-ensemble invariant de* E *et l'ensemble* ω*-limite de toute trajectoire est l'origine. On en conclut que l'origine est encore asymptotiquement stable.*

Bibliographie

[1] J.P. LaSalle, Some extensions of Liapunov's second method, *IRE Trans. Circuit Theory*, **CT-7** (1960), 520–527.