

# Chapitre 1

## Les coniques

Christiane Rousseau

### 1.1 Introduction

Les coniques sont des courbes planes. Elles sont caractérisées par le fait que leur équation dans le plan en géométrie analytique est de la forme  $P(x, y) = 0$ , où  $P(x, y)$  est un polynôme de degré 2. Elles ont de multiples applications anciennes et modernes dans de nombreux domaines des sciences et de la technologie.

Bien que la géométrie analytique ait fait ses preuves pour résoudre des problèmes, elle n'est pas toujours la méthode optimale pour comprendre et découvrir les propriétés des coniques. Beaucoup de ces propriétés découlent de la définition purement géométrique de ces courbes.

*DÉFINITION 1 L'ensemble des points du plan ayant une propriété donnée est appelé lieu géométrique des points ayant cette propriété.*

Nous allons commencer par définir les coniques comme « lieux géométriques ». Nous en déduirons leurs équations dans le plan. Nous jouerons sur les deux tableaux pour explorer leurs propriétés.

Dans tout ce chapitre on note par  $|AB|$  la longueur du segment  $AB$  d'extrémités  $A$  et  $B$ .

### 1.2 Les coniques comme lieux géométriques. Les équations canoniques des coniques.

#### 1.2.1 La parabole

*DÉFINITION 2 État donné un point  $F$  du plan et une droite  $(\Delta)$  du plan ne passant pas par  $F$ , la parabole de foyer  $F$  et de directrice  $(\Delta)$  est le lieu géométrique des points à*

égale distance de  $F$  et de  $(\Delta)$ .

Nous allons trouver l'équation de la parabole dans le cas particulier.

**THÉORÈME 1** L'équation de la parabole de foyer  $F = (0, b)$  et de directrice  $(\Delta)$  d'équation  $y = -b$  est  $y = \frac{1}{4b}x^2$ .

**PREUVE** Soit  $P = (x, y)$  un point de la parabole. Alors  $|FP| = \sqrt{x^2 + (y - b)^2}$ . D'autre part la projection du point  $P$  sur la droite  $(\Delta)$  est le point  $Q = (x, -b)$ . La distance de  $P$  à  $(\Delta)$  est donnée par  $|PQ| = |y + b|$ . On doit avoir  $|FP| = |PQ|$ , ce qui donne

$$\sqrt{x^2 + (y - b)^2} = |y + b|.$$

On élève au carré des deux côtés :

$$x^2 + (y - b)^2 = (y + b)^2,$$

ou encore,

$$x^2 + y^2 - 2yb + b^2 = y^2 + 2yb + b^2,$$

ce qui entraîne,

$$4yb = x^2,$$

et finalement  $y = \frac{1}{4b}x^2$ . □

**COROLLAIRE 1** Étant donné une parabole d'équation  $y = ax^2$ , son foyer est situé en  $(0, \frac{1}{4a})$  et sa directrice est la droite  $y = -\frac{1}{4a}$ . Si  $a > 0$ , la parabole est tournée vers le haut et si  $a < 0$ , elle est tournée vers le bas.

**DÉFINITION 3** 1. L'axe de la parabole est la droite  $(D)$  passant par le foyer et perpendiculaire à la directrice. C'est un axe de symétrie : si un point  $P$  est sur la parabole, alors le symétrique de  $P$  par rapport à  $(D)$  est encore sur la parabole.

2. Le sommet de la parabole est le point d'intersection de la parabole avec son axe.

**EXEMPLE 1** Dans la parabole  $y = ax^2$ , l'axe de la parabole est la droite  $x = 0$  et le sommet est le point  $(0, 0)$ .

**EXEMPLE 2** L'équation d'une parabole de sommet  $(h, k)$  et d'axe  $x = h$  est de la forme

$$y - k = a(x - h)^2.$$

En effet, partant de l'équation  $Y = aX^2$  de sommet en  $(0, 0)$  et d'axe  $X = 0$ , une translation  $(x, y) = (X, Y) + (h, k)$  transporte le sommet en  $(h, k)$ . Un point  $(0, Y)$  de l'axe de la parabole  $Y = aX^2$  est transformé en un point  $(h, Y + k)$ , soit un point de la droite  $x = h$ . De la formule  $(x, y) = (X, Y) + (h, k)$  on tire  $(X, Y) = (x - h, y - k)$ . En remplaçant  $X$  par  $x - h$  et  $Y$  par  $y - k$  dans l'équation  $Y = aX^2$ , on obtient bien  $y - k = a(x - h)^2$ .

## 1.2. LES CONIQUES COMME LIEUX GÉOMÉTRIQUES. LES ÉQUATIONS CANONIQUES DES CONIQUES.3

EXEMPLE 3 L'équation d'une parabole de sommet  $(h, k)$  et d'axe  $y = k$  est de la forme

$$x - y = a(y - k)^2.$$

Nous laissons la preuve pour l'exercice 1.9.

### 1.2.2 L'ellipse

DÉFINITION 4 Étant donné deux points distincts  $F_1$  et  $F_2$ , une ellipse de foyers  $F_1$  et  $F_2$  est le lieu géométrique des points dont la somme des distances à  $F_1$  et  $F_2$  est une constante  $C > |F_1F_2|$ .

THÉORÈME 2 Une ellipse de foyers  $F_1 = (-c, 0)$  et  $F_2 = (0, c)$  a une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec  $a > b$ . Les nombres  $a$  et  $b$  sont tels que  $a^2 - b^2 = c^2$  et  $C = 2a$ .

PREUVE Soit  $P = (x, y)$  un point de l'ellipse. Alors,  $|F_1P| + |F_2P| = C$ . On a

$$\begin{cases} |F_1P| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ |F_2P| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{cases}$$

Comme  $|F_1P| = C - |F_2P|$ , ceci nous donne

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = C - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Élevons au carré

$$(x+c)^2 + y^2 = C^2 + (x-c)^2 + y^2 - 2C\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

que l'on peut aussi écrire comme

$$2C\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = C^2 + (x-c)^2 - (x+c)^2 = C^2 - 4xc.$$

Élevons de nouveau au carré

$$4C^2((x-c)^2 + y^2) = C^4 - 8C^2cx + 16c^2x^2.$$

Lorsqu'on développe le carré à gauche, on obtient un terme  $-8C^2cx$  qui se simplifie avec le terme correspondant du membre de droite. L'équation se simplifie à la forme

$$(4C^2 - 16c^2)x^2 + 4C^2y^2 = C^4 - 4C^2c^2.$$

Factorisons certains des coefficients

$$4(C^2 - 4c^2)x^2 + 4C^2y^2 = C^2(C^2 - 4c^2).$$

Divisons par  $C^2(C^2 - 4c^2)$ . On obtient

$$\frac{4}{C^2}x^2 + \frac{4}{C^2 - 4c^2}y^2 = 1.$$

Ceci suggère de poser  $a^2 = \frac{C^2}{4}$  et  $b^2 = \frac{C^2 - 4c^2}{4}$ . Dans ce dernier cas, ceci n'est légitime que si  $C^2 - 4c^2 > 0$ . Mais c'est le cas puisque  $C > |F_1 F_2| = 2c$ .

On a donc  $a = \frac{C}{2}$ , donc  $C = 2a$ . Remplaçons dans l'expression de  $b$  :  $b^2 = \frac{4a^2 - 4c^2}{4} = a^2 - c^2$ .  $\square$

L'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  est l'équation canonique d'une ellipse. Décrivons quelques unes de ses propriétés.

PROPOSITION 1 On considère une ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

1. Les droites  $x = 0$  et  $y = 0$  sont des axes de symétrie de l'ellipse, simplement appelées les axes de l'ellipse.
2. Les points d'intersection de l'ellipse avec ses axes sont les points  $(\pm a, 0)$  et  $(0, \pm b)$ . (Pour cette raison, les nombres  $a$  et  $b$  sont appelés demi-axes de l'ellipse.)
3. L'ellipse est l'ensemble des points  $\{(a \cos \theta, b \sin \theta) \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$ .
4. Dans le cas où  $a = b$  (ce qui correspond à  $F_1 = F_2$ ), l'ellipse est un cercle centré à l'origine de rayon  $a$ .
5. Dans le cas  $b > a$ , l'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  représente encore une ellipse d'axes  $x = 0$  et  $y = 0$ . Les foyers sont aux points  $(0, \pm c)$ , où  $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ .

PREUVE La preuve est laissée pour l'exercice 1.9.  $\square$

### 1.2.3 L'hyperbole

DÉFINITION 5 Étant donné deux points distincts  $F_1$  et  $F_2$ , une hyperbole de foyers  $F_1$  et  $F_2$  est le lieu géométrique des points dont la valeur absolue de la différence des distances à  $F_1$  et  $F_2$  est une constante  $C < |F_1 F_2|$ .

THÉORÈME 3 Une hyperbole de foyers  $F_1 = (-c, 0)$  et  $F_2 = (0, c)$  a une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec  $a, b > 0$ . Les nombres  $a$  et  $b$  sont tels que  $a^2 + b^2 = c^2$  et  $C = 2a$ .

PREUVE Soit  $P = (x, y)$  un point de l'hyperbole. Alors,  $||F_1 P| - |F_2 P|| = C$ . On a

$$\begin{cases} |F_1 P| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ |F_2 P| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{cases}$$

## 1.2. LES CONIQUES COMME LIEUX GÉOMÉTRIQUES. LES ÉQUATIONS CANONIQUES DES CONIQUES.5

Comme  $|F_1P| = C + |F_2P|$  ou bien  $|F_2P| = C + |F_1P|$ , ceci nous donne qu'une des deux équations suivantes est vérifiée

$$\begin{cases} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = C + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = C + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \end{cases}$$

Élevons au carré

$$\begin{cases} (x+c)^2 + y^2 = C^2 + (x-c)^2 + y^2 + 2C\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ (x-c)^2 + y^2 = C^2 + (x+c)^2 + y^2 + 2C\sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \end{cases}$$

que l'on peut aussi écrire comme

$$\begin{cases} 2C\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -C^2 + (x+c)^2 - (x-c)^2 = 4xc - C^2, \\ 2C\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -C^2 + (x-c)^2 - (x+c)^2 = -4xc - C^2. \end{cases}$$

Élevons de nouveau au carré

$$\begin{cases} 4C^2((x-c)^2 + y^2) = C^4 - 8C^2cx + 16c^2x^2, \\ 4C^2((x+c)^2 + y^2) = C^4 + 8C^2cx + 16c^2x^2. \end{cases}$$

Lorsqu'on développe les carrés à gauche, les termes  $\pm 8C^2cx$  se simplifient avec les termes correspondant du membre de droite. Les deux équations se simplifient à la même forme

$$(4C^2 - 16c^2)x^2 + 4C^2y^2 = C^4 - 4C^2c^2.$$

Comme dans le cas de l'ellipse, divisons par  $C^2(C^2 - 4c^2)$ . On obtient

$$\frac{4}{C^2}x^2 + \frac{4}{C^2 - 4c^2}y^2 = 1.$$

Ceci suggère de poser  $a^2 = \frac{C^2}{4}$  et  $b^2 = -\frac{C^2 - 4c^2}{4}$ . Dans ce dernier cas, ceci n'est légitime que si  $C^2 - 4c^2 > 0$ . Mais c'est le cas puisque  $C < |F_1F_2| = 2c$ .

On a donc  $a = \frac{C}{2}$ , donc  $C = 2a$ . Remplaçons dans l'expression de  $b$  :  $b^2 = -\frac{4a^2 - 4c^2}{4} = c^2 - a^2$ .  $\square$

L'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$  est l'équation canonique d'une hyperbole. Décrivons quelques unes de ses propriétés.

**PROPOSITION 2** On considère une hyperbole d'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ .

1. Les droites  $x = 0$  et  $y = 0$  sont des axes de symétrie de l'hyperbole, simplement appelées les axes de l'hyperbole.
2. L'hyperbole  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  intersecte l'axe des  $x$  aux points  $(\pm a, 0)$  et n'intersecte pas l'axe des  $y$ . L'hyperbole  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$  intersecte l'axe des  $y$  aux points  $(0, \pm b)$  et n'intersecte pas l'axe des  $x$ .

3. L'hyperbole  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$  a deux asymptotes d'équations  $\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$ .
4. La branche de droite de l'hyperbole  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  est l'ensemble des points  $\{(a \cosh \theta, b \sinh \theta) \mid \theta \in (-\infty, \infty)\}$ , où les fonctions  $\cosh$  (cosinus hyperbolique) et  $\sinh$  (sinus hyperbolique) sont définies comme suit

$$\begin{cases} \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \\ \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}). \end{cases}$$

PREUVE La preuve est laissée pour l'exercice 1.9. □.

### 1.3 Le traçage des coniques

On connaît la construction d'un cercle avec un compas. La construction fonctionne parce que le cercle de rayon  $R$  centré en  $O$  est le lieu géométrique des points à distance  $R$  du point  $O$  et que l'ouverture du compas est exactement  $r$ . Une construction analogue de l'ellipse de foyers  $F_1$  et  $F_2$  se fait en fixant les deux extrémités d'une corde de longueur  $C$  aux 2 points  $F_1$  et  $F_2$ . L'ellipse est l'ensemble des points tracés par un crayon qui tend la corde (figure 1.1). Ce procédé n'est pas très précis, car il est difficile de contrôler l'angle du crayon. Un outil beaucoup plus précis est décrit à l'exercice 1.9. L'exercice 1.9 donne une méthode de traçage de l'hyperbole à l'aide d'une corde et d'une tige de bois. L'exercice 1.9 donne une méthode de traçage à l'aide d'une corde et d'une équerre.

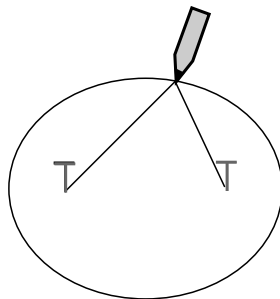


FIG. 1.1 – Le traçage d'une ellipse au moyen d'une corde tendue entre les deux foyers

### 1.4 Les miroirs de forme conique

Les coniques, parabole, ellipse, hyperbole, ont des propriétés optiques remarquables qui justifient leur utilisation dans nombre de technologies : phares,

haut-parleurs, miroirs de télescopes, antennes paraboliques, fours solaires, radars, etc. (voir par exemple [3]).

Pour cela, il y a lieu de rappeler la loi de la réflexion en optique :

**Loi de la réflexion** Lorsqu'un rayon lumineux arrive à la surface d'un miroir, l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

Le théorème suivant décrit la propriété optique de la parabole.

**THÉORÈME 4 (la propriété optique de la parabole)** *Tous les rayons parallèles à l'axe de la parabole et réfléchis sur la parabole passent au foyer de la parabole (voir figure 1.2).*

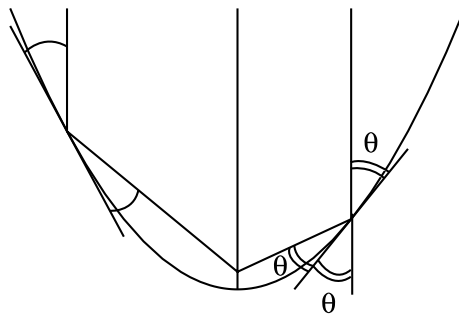


FIG. 1.2 – La propriété optique de la parabole

**PREUVE** On raisonne sur la figure 1.3. On considère une parabole de foyer  $F$

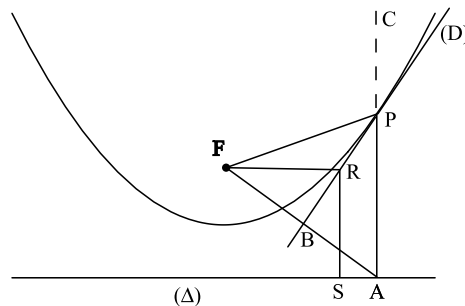


FIG. 1.3 – La preuve géométrique de la propriété optique de la parabole

et de directrice  $(\Delta)$ . Soit  $P$  un point de la parabole, et soit  $A$  sa projection sur  $(\Delta)$ . Par définition de la parabole, on sait que  $|PF| = |PA|$ . Soit  $B$  le milieu du segment  $FA$  et soit  $(D)$  la droite passant par  $P$  et  $B$ . Comme le triangle  $FPA$  est

isocèle, on sait qu'on a l'égalité des angles  $\widehat{FPB} = \widehat{APB}$ . On démontrera donc le théorème si on montre que la droite (D) est tangente à la parabole en P. En effet, regardons le prolongement PC de PA, qui est le rayon incident. L'angle que fait PC avec la droite (D), c'est-à-dire l'angle entre le rayon incident et la droite (D), est égal à l'angle  $\widehat{APB}$  (angles opposés par le sommet), lequel est égal à l'angle  $\widehat{FPB}$ . Donc, si la droite (D) se comporte comme un miroir et si PC est le rayon incident, alors PF sera le rayon réfléchi.

Il nous faut maintenant prouver que la droite (D) définie ci-dessus est tangente à la parabole en P. Nous montrerons pour cela que tous les points de (D), sauf P, sont situés sous la parabole. En effet, il est facile de se convaincre que toute droite passant par P autre que la tangente à la parabole a des points situés au-dessus de la parabole (voir la figure 1.4).

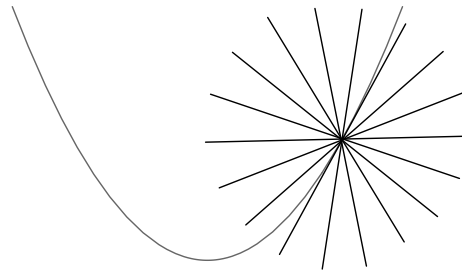


FIG. 1.4 – La tangente à la parabole en P est la seule droite passant par P qui n'a pas de point au-dessus de la parabole.

La propriété géométrique définissant la parabole peut être reformulée ainsi : soient R un point quelconque du plan et S sa projection orthogonale sur la droite directrice. Alors, on a

$$\begin{cases} |FR| < |SR| & \text{si R est au-dessus de la parabole,} \\ |FR| = |SR| & \text{si R est sur la parabole,} \\ |FR| > |SR| & \text{si R est au-dessous de la parabole.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Prenons donc R, un point quelconque de (D) différent de P, et soit S sa projection sur ( $\Delta$ ). Les triangles FPR et PAR sont congrus, car ils ont un angle égal entre deux côtés égaux. Donc,  $|FR| = |AR|$ . D'autre part, puisque AR est l'hypoténuse du triangle rectangle RSA, on a  $|SR| < |AR|$ . Donc,  $|SR| < |FR|$ , ce qui implique de par (1.1), que R est sous la parabole.  $\square$

L'ellipse a une propriété optique du même type que la parabole.

**THÉORÈME 5 (la propriété optique de l'ellipse)** *Tout rayon incident partant d'un des foyers et réfléchi sur l'ellipse arrive à l'autre foyer.*



PREUVE Ici aussi, nous allons donner une preuve géométrique utilisant seulement la définition 4, que nous pouvons reformuler comme suit : si  $R$  est un point quelconque du plan, on a

$$\begin{cases} |F_1R| + |F_2R| < C & \text{si } R \text{ est à l'intérieur de l'ellipse,} \\ |F_1R| + |F_2R| = C & \text{si } R \text{ est sur l'ellipse,} \\ |F_1R| + |F_2R| > C & \text{si } R \text{ est à l'extérieur de l'ellipse.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Considérons un rayon issu de  $F_1$  frappant l'ellipse au point  $P$  (figure 1.5). Prenons la droite  $(D)$  passant par  $P$  et faisant des angles égaux avec  $F_1P$  et

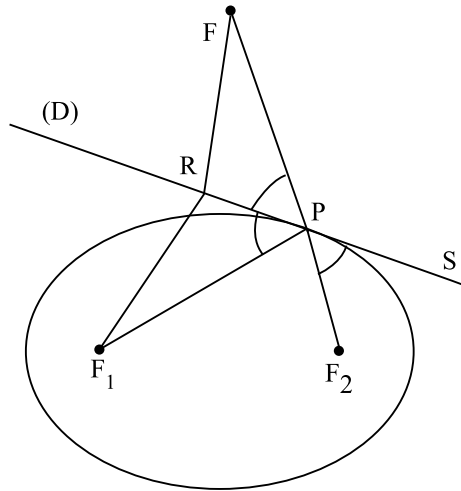


FIG. 1.5 – La propriété optique de l'ellipse

$F_2P$ . On doit montrer que cette droite est tangente à l'ellipse en  $P$ . Ici encore, on se sert du fait que toute droite passant par  $P$  autre que la tangente à l'ellipse a des points intérieurs à l'ellipse (figure 1.6). On doit donc montrer que tout point  $R$  de  $(D)$  différent de  $P$  satisfait à  $|F_1R| + |F_2R| > C$ .

Soit  $F$  le symétrique de  $F_1$  par rapport à  $(D)$ . Puisque  $P$  et  $R$  sont sur  $(D)$ , on a par symétrie  $|FP| = |F_1P|$  et  $|FR| = |F_1R|$ . Donc, les triangles  $F_1PR$  et  $FPR$  sont congrus, car ils ont trois côtés égaux. On en déduit l'égalité des angles  $\widehat{FPR} = \widehat{F_1PR}$ . Comme  $\widehat{F_1PR} = \widehat{F_2PS}$  par définition de  $(D)$ , on a  $\widehat{FPR} = \widehat{F_2PS}$ , ce qui nous permet de conclure que  $F_2, F$  et  $P$  sont alignés. Par conséquent,  $|FF_2| = |FP| + |PF_2|$  et

$$|F_1R| + |F_2R| = |FR| + |F_2R| > |FF_2|.$$

Or,

$$|FF_2| = |FP| + |PF_2| = |F_1P| + |PF_2| = C.$$

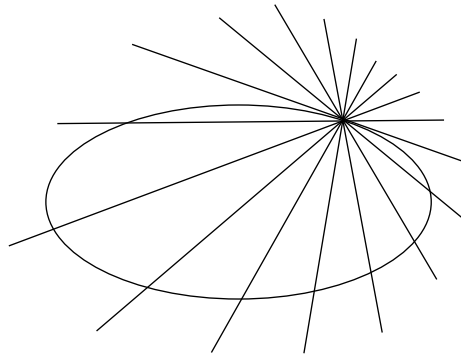


FIG. 1.6 – La tangente à l'ellipse en un point  $P$  est la seule droite passant par  $P$  qui n'a pas de point intérieur à l'ellipse.

Donc,  $|F_1R| + |F_2R| > C$ , ce qui permet de conclure que  $R$  est en dehors de l'ellipse.  $\square$

L'hyperbole a une propriété optique correspondante.

**THÉORÈME 6 (la propriété optique de l'hyperbole)** *Tout rayon incident situé à l'extérieur d'une branche d'hyperbole et dirigé vers le foyer situé à l'intérieur de cette branche est réfléchi sur la branche d'hyperbole vers l'autre foyer de l'hyperbole (figure 1.7).*

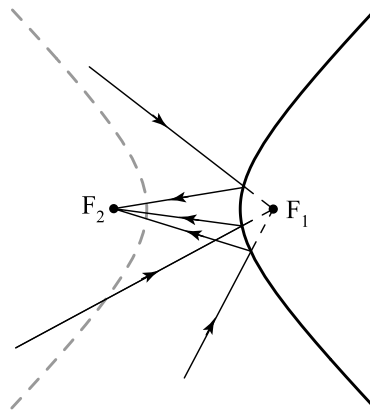


FIG. 1.7 – La propriété optique de l'hyperbole

**PREUVE** La preuve, semblable à celle du théorème 5, est laissée pour l'exercice 1.9.  $\square$

## 1.5 Les équations des coniques en coordonnées polaires dans un repère centré à un foyer

Une des lois de Kepler dit qu'une planète se meut autour du soleil sur une orbite elliptique, dont le soleil est un foyer. En fait si la vitesse initiale est assez grande on pourrait aussi avoir une orbite parabolique ou hyperbolique. Dans une orbite parabolique on atteint l'infini en un temps infini et dans une orbite hyperbolique on atteint l'infini en un temps fini. Pour démontrer cette loi de Kepler, on intègre les équations de Newton. Ceci se fait dans un repère centré au soleil et en utilisant les coordonnées polaires. Pour reconnaître que ces équations des trajectoires sont de forme conique il faut donc connaître les équations des coniques en coordonnées polaires dans un repère centré à un foyer. Ces équations mettent en lumière que les coniques forment une famille avec la parabole comme position intermédiaire, entre l'ellipse et l'hyperbole. Pour cette raison, dans cette section on va considérer la parabole d'axe horizontal, l'ellipse de grand axe horizontal et l'hyperbole de foyer sur l'axe horizontal. Pour l'ellipse, on prendra un repère centré au foyer de gauche, et pour l'hyperbole, un repère centré au foyer de droite.

**L'équation de la parabole en coordonnées polaires dans un repère centré au foyer** On considère une parabole dont le foyer est en  $(0, 0)$  et la directrice en  $x = -A$ . Soit  $P = (x, y)$  un point de la parabole. On utilise les coordonnées polaires  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . La distance de  $P$  au foyer est  $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ . Sa distance à la directrice est  $x + A = r \cos \theta + A$ . Le point  $P$  est sur la parabole si  $r = r \cos \theta + A$ , ce qui nous donne l'équation de la parabole en coordonnées polaires.

$$r = \frac{A}{1 - \cos \theta}. \quad (1.3)$$

**L'équation de l'ellipse en coordonnées polaires dans un repère centré à un foyer**

On considère une ellipse avec un foyer en  $F_1 = (0, 0)$  et un foyer en  $F_2 = (B, 0)$ . Soit  $P = (x, y)$  un point de l'ellipse. On a  $|F_1 P| = r$  et  $|F_2 P| = \sqrt{(x - B)^2 + y^2}$ . Alors,

$$\begin{aligned} |F_2 P| &= \sqrt{(r \cos \theta - B)^2 + r^2 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{r^2 \cos^2 \theta - 2Br \cos \theta + B^2 + r^2 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{r^2 - 2Br \cos \theta + B^2}. \end{aligned}$$

Le point est sur l'ellipse si  $|F_1 P| + |F_2 P| = C$ , ce qui donne

$$r + \sqrt{r^2 - 2Br \cos \theta + B^2} = C.$$

On en tire  $\sqrt{r^2 - 2Br \cos \theta + B^2} = C - r$ . Élevons au carré

$$r^2 - 2Br \cos \theta + B^2 = r^2 - 2Cr + C^2,$$

d'où  $-2Br \cos \theta + B^2 = -2Cr + C^2$ , ou encore  $r(2C - 2B \cos \theta) = C^2 - B^2$ .  
L'équation est donc

$$r = \frac{C^2 - B^2}{2C - 2B \cos \theta}. \quad (1.4)$$

Remarquons que  $C > B$ , donc  $C^2 - B^2 > 0$ .

**L'équation d'une branche d'hyperbole en coordonnées polaires dans un repère centré à un foyer**

On considère une hyperbole avec un foyer en  $F_1 = (0, 0)$  et un foyer en  $F_2 = (-B, 0)$ . Soit  $P = (x, y)$  un point de la branche de droite de l'hyperbole. On a  $|F_1P| = r$  et

$$|F_2P| = \sqrt{(x + B)^2 + y^2} = \sqrt{r^2 + 2Br \cos \theta + B^2}.$$

Le point est sur la branche droite de l'hyperbole si  $|F_2P| - |F_1P| = C$ , ce qui donne

$$\sqrt{r^2 + 2Br \cos \theta + B^2} - r = C.$$

On en tire  $\sqrt{r^2 + 2Br \cos \theta + B^2} = C + r$ . Élevons au carré

$$r^2 + 2Br \cos \theta + B^2 = r^2 + 2Cr + C^2,$$

d'où  $2Br \cos \theta + B^2 = 2Cr + C^2$ , ou encore  $r(2C - 2B \cos \theta) = B^2 - C^2$ . L'équation est donc

$$r = \frac{B^2 - C^2}{2C - 2B \cos \theta}. \quad (1.5)$$

Ici,  $C < B$ , donc  $B^2 - C^2 > 0$ .

On voit que tous les angles ne sont pas permis puisqu'il faut que  $r > 0$ . Ceci correspond au fait qu'une branche d'hyperbole ne fait pas le tour de l'origine. On explorera ceci plus en détails à l'exercice 1.9.

Nous allons retravailler les équations (1.3), (1.4) et (1.5) pour les mettre sous une forme unifiée. Ces trois équations sont de la forme  $r = \frac{\alpha}{\beta + \gamma \cos \theta}$ . On peut bien sûr diviser au numérateur et au dénominateur par  $\beta$  pour se ramener au cas  $\beta = 1$ . Faisons cela. Les équations deviennent

$$\left\{ \begin{array}{ll} r = \frac{A}{1 - \cos \theta} & \text{pour la parabole} \\ r = r \frac{\frac{C^2 - B^2}{2C}}{1 - \frac{B}{C} \cos \theta} & \text{pour l'ellipse} \\ r = r \frac{\frac{B^2 - C^2}{2C}}{1 - \frac{B}{C} \cos \theta} & \text{pour l'hyperbole} \end{array} \right.$$

Ces trois équations sont de la forme

$$r = \frac{A}{1 - e \cos \theta}, \quad (1.6)$$

où  $A > 0$ . Le nombre  $e \geq 0$  est l'*excentricité* de l'ellipse. On a

$$e \begin{cases} = 1 & \text{parabole} \\ < 1 & \text{ellipse} \\ > 1 & \text{hyperbole} \end{cases}$$

et remarquons le cas particulier  $e = 0$  qui se produit pour l'ellipse si  $B = 0$  et qui correspond au cercle, car les deux foyers sont confondus.

Dans l'équation (1.6) les deux paramètres  $A$  et  $e$  jouent des rôles distincts. Le paramètre  $e$  contrôle la forme de la conique. Lorsque  $e$  croît de 0 à 1, l'ellipse s'étire jusqu'à attraper l'infini au moment où elle devient une parabole. Que se passe-t-il lorsque  $e \rightarrow \infty$ ? Ceci correspond au fait que  $C \rightarrow 0$ , c'est-à-dire que la pente des asymptotes devient très grande. En effet, prendre  $C = 0$  revient à dire que la différence des distances aux deux foyers est nulle, c'est-à-dire qu'on est sur la médiatrice du segment joignant les deux foyers. Le paramètre  $A$  contrôle la taille de la conique à la manière d'une homothétie.

## 1.6 Les applications de l'hyperbole aux problèmes de positionnement

Un problème de positionnement consiste à calculer la position d'un objet ou une personne dans un plan ou dans l'espace. Le principe de base est de connaître la position de l'objet par rapport à des objets dont la position est connue. Dans un tel problème, il est courant que l'on puisse déterminer, non pas la distance d'un objet à un objet de position connue, mais seulement la différence entre ses distances à deux objets de position connue. Voyons quelques exemples courants :

1. Un tremblement de terre se produit. Plusieurs stations sismologiques ont noté l'heure du tremblement de terre. Où et quand le tremblement de terre s'est-il produit? Quelle était sa force?
2. Une météorite se désintègre. Plusieurs stations sismologiques ont noté l'heure de la désintégration. Où et quand la météorite s'est-elle désintégrée?
3. Des coups de foudre frappent le territoire du Québec. Plusieurs détecteurs d'Hydro-Québec les captent. Où sont situés ces coups de foudre? Une fois qu'on les a localisés, on peut localiser les orages et délester les lignes dans la région des orages. Ainsi, en cas de perte d'une ligne frappée par un coup de foudre, peu d'abonnés seront touchés.

Prenons le premier problème. Le tremblement de terre se produit au point  $P$  au temps  $t$ .  $P$  et  $t$  sont inconnus. L'onde de choc se propage à la vitesse  $v$ . Elle est captée au temps  $t_1$  par une station sismologique située en  $A_1$ , et au temps  $t_2$ , par une deuxième station sismologique située en  $A_2$ . Soit  $d_i = |PA_i|$ . Alors,  $d_i = \frac{t_i - t}{v}$ . Les deux nombres  $d_1$  et  $d_2$  sont inconnus. Mais,

$$d_1 - d_2 = \frac{t_1 - t}{v} - \frac{t_2 - t}{v} = \frac{t_1 - t_2}{v}$$

est connu ! Et si une troisième station située en  $A_3$  avait capté l'onde de choc au temps  $t_3$  et  $d_3 = \frac{t_3 - t}{v}$ , alors  $d_1 - d_3 = \frac{t_1 - t_3}{v}$  serait aussi connu.

Lorsqu'on peut se ramener à un problème dans un plan, alors connaître la différence des distances d'un objet à deux objets de position connue revient à le situer sur une branche d'hyperbole. Si on connaît la différence des distances de l'objet à d'autres paires d'objets de position connue, alors on situe l'objet à l'intersection de branches d'hyperboles. C'est le principe du fonctionnement du système Loran en navigation (exercice 1.9).

## 1.7 Construire une conique en Origami

L'origami est cet art japonais de pliage du papier (initialement originaire de Chine). Il date du début du 17<sup>e</sup> siècle. L'intérêt des mathématiciens pour cet art est plus récent.

Les mathématiciens ont axiomatisé l'Origami et se sont intéressés à comprendre et caractériser les constructions possibles en effectuant des pliages consécutifs d'une feuille de papier. Ils se sont entre autres intéressés à la géométrie de l'Origami.

S'intéresser au pliage du papier peut sembler un jeu gratuit. En fait, il existe des applications. Prenons par exemple les coussins gonflables d'une auto. Quelle est la meilleure manière de les replier ? Les mathématiciens ou informaticiens théoriciens travaillent sur ce genre de problèmes.

Les six axiomes du pliage en Origami sont les suivants : **Axiomes de l'Origami**

1. Un unique pli passe par deux points  $P$  et  $Q$  spécifiés (distincts).
2. Un unique pli amène un point  $P$  sur un point  $Q$  ( $P \neq Q$ ).
3. Il existe un pli qui superpose deux droites distinctes ( $D_1$ ) et ( $D_2$ ).
4. Un unique pli passe par un point  $P$  et est orthogonal à une droite ( $D$ ).
5. Soit une droite ( $D$ ) et deux points  $P$  et  $Q$ . Lorsque le problème est possible, il existe un pli passant par  $P$  qui amène  $Q$  sur ( $D$ ).
6. Soit deux droites distinctes ( $D_1$ ) et ( $D_2$ ) et deux points distincts  $P$  et  $Q$ . Lorsque le problème est possible, il existe un pli qui amène simultanément  $P$  sur ( $D_1$ ) et  $Q$  sur  $D_2$ .

En comparaison la géométrie d'Euclide part des principes

- (a) qu'il est toujours possible de tracer une droite entre deux points ;
- (b) qu'il est toujours possible de tracer un cercle de centre donné et passant par un point donné.

On obtient de nouveaux points comme intersections de droites ou cercles. Quels sont les points, droites ou cercles qu'on peut obtenir par cette méthode ? Étant donné un segment auquel on attribue la longueur 1, quelles sont les différentes longueurs de segments qu'on peut obtenir par cette méthode ? Ce sont les mathématiques des constructions à la règle et au compas.

Examinons les axiomes de l'Origami d'un peu plus près.

1. **Un unique pli passe par deux points  $P$  et  $Q$  spécifiés (distincts).** C'est le principe (a) d'Euclide.
2. **Un unique pli amène un point  $P$  sur un point  $Q$  ( $P \neq Q$ ).** Ce pli est la médiatrice du segment  $PQ$ , c'est-à-dire le lieu géométrique des points à égale distance de  $P$  et  $Q$ . C'est une droite qu'on apprend à tracer avec règle et compas.
3. **Il existe un pli qui superpose deux droites distinctes ( $D_1$ ) et ( $D_2$ ).** Ici, il faut distinguer deux cas. Lorsque les droites sont parallèles, cette droite est la parallèle équidistante aux deux droites. Lorsqu'elles sont sécantes, un tel pli est une bissectrice d'un angle formé par les deux droites. Il y a deux bissectrices possibles. Dans les deux cas, ces droites peuvent être construites à la règle et au compas.
4. **Un unique pli passe par un point  $P$  et est orthogonal à une droite ( $D$ ).** La droite construite est la perpendiculaire à ( $D$ ) passant par  $P$ . Elle peut être construite à la règle et au compas.
5. **Soit une droite ( $D$ ) et deux points  $P$  et  $Q$ . Lorsque le problème est possible, il existe un pli passant par  $P$  qui amène  $Q$  sur ( $D$ ).** Supposons que cette droite ( $\Delta$ ) soit construite. Soit  $Q'$  le symétrique de  $Q$  par rapport à ( $\Delta$ ). plier le papier sur ( $\Delta$ ) amène  $Q$  sur  $Q'$ . Donc  $Q' \in (D)$ . Il est facile de se convaincre que  $PQ = PQ'$ . Donc ( $\Delta$ ) est la médiatrice de  $QQ'$ . Si on avait voulu construire ( $\Delta$ ) avec la règle et le compas, on aurait commencé par construire  $Q'$  comme intersection du cercle centré en  $P$  de rayon  $|PQ|$  et de ( $D$ ). Un tel point d'intersection n'existe que si  $|PQ|$  est supérieur à la distance de  $P$  à ( $D$ ). Une fois  $Q'$  connu, construire la médiatrice de  $QQ'$  avec la règle et le compas est la même construction qu'à l'axiome 2.
6. **Soit deux droites distinctes ( $D_1$ ) et ( $D_2$ ) et deux points distincts  $P$  et  $Q$ . Lorsque le problème est possible, il existe un pli qui amène simultanément  $P$  sur ( $D_1$ ) et  $Q$  sur  $D_2$ .** Cet axiome est puissant. Il permet des constructions qui sont impossibles à la règle et au compas. Nous y reviendrons plus tard et verrons qu'il permet de tracer une tangente commune à deux paraboles.

Revenons maintenant à la « construction des coniques en Origami ». Bien sûr, on ne peut plier le papier le long d'une courbe. Mais on va plier le papier le long de toutes les tangentes à une conique. La conique sera l'enveloppe de la famille de toutes les droites de pliage.

THÉORÈME 7 *Considérons une feuille de papier dont un bord est la droite  $(\Delta)$  et soit  $F$  un point de la feuille. Soit  $P$  un point de  $(\Delta)$ . On plie la feuille de manière à amener  $P$  sur  $F$ . Soit  $(D_P)$  la droite du pli. Alors, la droite  $(D_P)$  est tangente à la parabole de foyer  $P$  et de directrice  $(\Delta)$ . La parabole est l'enveloppe de la famille de courbes  $(D_P)_{P \in (\Delta)}$  (voir figure 1.8).*

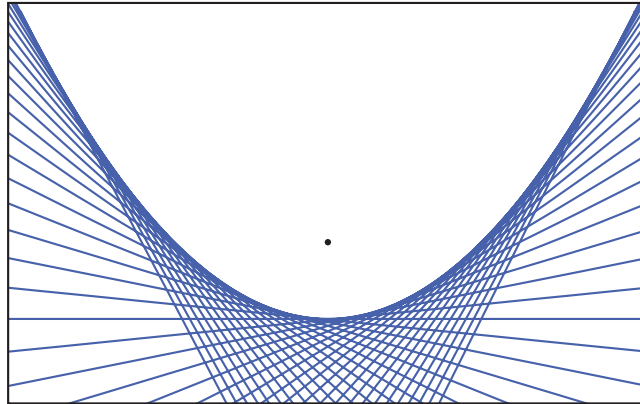


FIG. 1.8 – La construction d'une parabole en Origami

PREUVE La droite qu'on a construite est la médiatrice du segment  $PF$  (figure 1.9). Tous les points de cette droite sont donc à égale distance de  $P$  et de

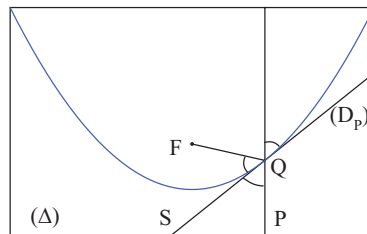


FIG. 1.9 – Preuve du théorème 7

$F$ . Soit  $Q$  le point d'intersection de  $(D_P)$  et de la perpendiculaire à  $(\Delta)$  en  $P$ . Le point  $Q$  est sur la parabole de foyer  $F$  et de directrice  $(D)$ , puisque  $|QF| = |QP|$  et que  $|QP|$  est la distance de  $Q$  à  $P$ . Lorsque nous avons étudié la propriété optique de la parabole, nous avons vu que la tangente à la parabole en  $Q$  est caractérisée par le fait qu'elle fait un angle égal avec  $QF$  et avec la perpendiculaire à la parabole en  $Q$ . Voyons que c'est le cas de  $(D_P)$ . Soit  $S$  le point d'intersection de  $(D_P)$  avec  $(\Delta)$ . Les angles  $\widehat{PQS}$  et  $\widehat{FQS}$  sont congrus, car envoyés l'un sur l'autre par pliage.  $\square$



Passons maintenant à la construction de l'ellipse et de l'hyperbole. Elle est similaire à celle de la parabole mais on remplace la droite ( $\Delta$ ) par un cercle ( $C$ ).

**THÉORÈME 8** *Considérons une feuille de papier sur laquelle on a dessiné un cercle ( $C$ ) de centre  $F_1$  et de rayon  $R$ , et soit  $F_2$  un point de la feuille, à l'intérieur du cercle. Soit  $P$  un point de ( $C$ ). On plie la feuille de manière à amener  $P$  sur  $F_2$ . Soit ( $D_P$ ) la droite du pli. Alors, la droite ( $D_P$ ) est tangente à l'ellipse de foyers  $F_1$  et  $F_2$  et telle que la somme des distances d'un point de l'ellipse aux deux foyers est égale à  $R$ . L'ellipse est l'enveloppe de la famille de courbes  $(D_P)_{P \in (C)}$  (voir figure 1.10).*

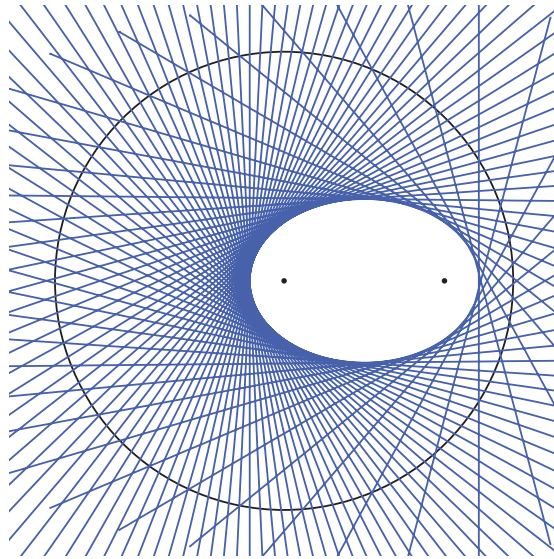


FIG. 1.10 – La construction d'une ellipse en Origami

**PREUVE** La droite qu'on a construite est la médiatrice du segment  $PF_1$  (figure 1.11). Tous les points de cette droite sont donc à égale distance de  $P$  et de  $F_1$ . Soit  $Q$  le point d'intersection de  $(D_P)$  et de la droite  $F_1P$ . Le point  $Q$  est sur l'ellipse de foyers  $F_1$  et  $F_2$  et telle que la somme des distances aux deux foyers soit égale au rayon  $R$  du cercle. En effet,

$$|QF_1| + |QF_2| = |QF_1| + |QP| = |F_1P| = R.$$

Lorsque nous avons étudié la propriété optique de l'ellipse, nous avons vu que la tangente à l'ellipse en  $Q$  est caractérisée par le fait qu'elle fait un angle égal avec  $QF_1$  et  $QF_2$ . Voyons que c'est le cas de  $(D_P)$ . Soit  $S$  le point d'intersection de  $(D_P)$  avec  $F_2P$ . Les angles  $\widehat{PQS}$  et  $\widehat{SQF_2}$  sont congrus, car envoyés l'un sur l'autre par pliage. De plus les angles  $\widehat{PQS}$  et  $\widehat{F_1QT}$  sont congrus car opposés par le sommet. Donc, les angles  $\widehat{SQF_2}$  et  $\widehat{F_1QT}$  sont congrus.  $\square$

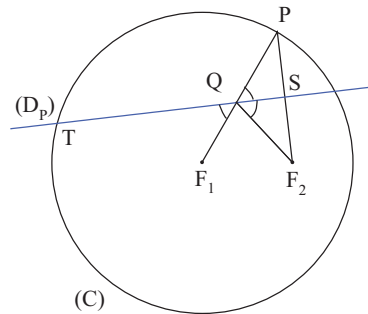


FIG. 1.11 – Preuve du théorème 8

**THÉORÈME 9** *Considérons une feuille de papier sur laquelle on a dessiné un cercle (C) de centre  $F_1$  de rayon  $R$ , et soit  $F_2$  un point de la feuille, à l'extérieur du cercle. Soit  $P$  un point de (C). On plie la feuille de manière à amener  $P$  sur  $F_2$ . Soit  $(D_P)$  la droite du pli. Alors, la droite  $(D_P)$  est tangente à l'hyperbole définie comme le lieu géométrique des points  $P$  tels que  $\|F_1P\| - \|F_2P\| = R$ . Cette branche d'hyperbole est l'enveloppe de la famille de courbes  $(D_P)_{P \in (C)}$  (voir figure 1.12).*

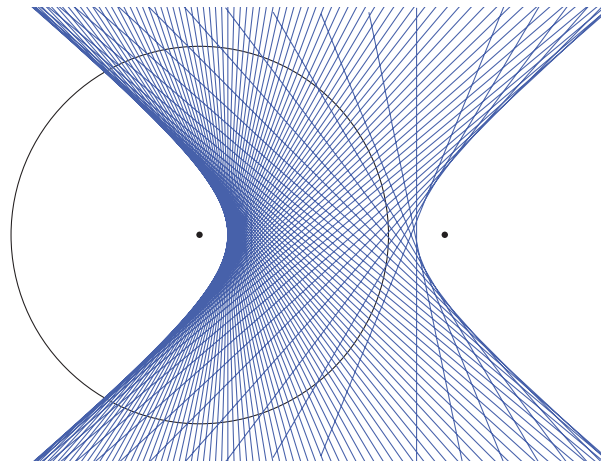


FIG. 1.12 – La construction d'une branche d'hyperbole en Origami

**PREUVE** La preuve est laissée pour l'exercice 1.9. Remarquez que certaines des droites sont tangentes à l'une des branches et d'autres à l'autre branche. Nous explorerons ceci à l'exercice 1.9.  $\square$

Ici encore, on voit l'unité de la famille des coniques. Partons de la construction d'une ellipse par Origami. La droite doit être vue comme la limite du cercle

quand le rayon  $R$  tend vers l'infini. Ceci correspond au fait que  $F_1$  s'éloigne à l'infini sur la gauche. Il réapparaît à l'infini sur droite et le cercle centré en  $F_1$  ne contient plus le point  $F_2$ . À la limite quand  $R = \infty$ ,  $F_2$  est le foyer de la parabole.

**Retour sur l'axiome 6** Rappelons cet axiome : Soit deux droites distinctes  $(D_1)$  et  $(D_2)$  et deux points distincts  $P$  et  $Q$ . Lorsque le problème est possible, il existe un pli qui amène simultanément  $P$  sur  $(D_1)$  et  $Q$  sur  $D_2$ . Nous avons vu lors de la preuve du théorème 7 qu'un pli qui amène un point  $P$  sur une droite  $(D)$  est une tangente à la parabole de foyer  $P$  et de directrice  $(D)$ . Donc un pli qui amène simultanément  $P$  sur  $(D_1)$  et  $Q$  sur  $D_2$  est un pli tangent simultanément à la parabole de foyer  $P$  et de directrice  $(D_1)$  et à la parabole de foyer  $Q$  et de directrice  $(D_2)$ . Il est facile de voir qu'il existe des couples de paraboles qui n'ont pas de tangente commune. C'est le cas, par exemple, des paraboles  $y = x^2$  et  $y = x^2 + 1$ . Regardons maintenant un autre exemple.

EXEMPLE 4 Prenons les paraboles  $y = \frac{1}{2}x^2$  et  $(y - \frac{a}{2})^2 = 2bx$ . Cherchons s'il existe une tangente commune aux deux paraboles au point  $(x_1, y_1)$  de la première et  $(x_2, y_2)$  de la deuxième. Alors  $y_1 = \frac{1}{2}x_1^2$  et  $(y_2 - \frac{a}{2})^2 = 2bx_2$ . Soit  $m$  la pente de cette droite, qui a donc pour équation  $y - y_1 = m(x - x_1)$ . Comme la droite passe par  $(x_2, y_2)$  on a

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (1.7)$$

Nous allons calculer  $x_1, x_2, y_1, y_2$  en fonction de  $m$  et substituer dans (1.7) pour obtenir une équation en  $m$  seulement. La pente de la parabole  $y = \frac{1}{2}x^2$  au point  $(x_1, y_1)$  est  $x_1$ . Donc  $x_1 = m$  et  $y_1 = \frac{1}{2}m^2$ . Regardons maintenant la parabole  $(y - \frac{a}{2})^2 = 2bx$ . On a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{b} \left( y - \frac{a}{2} \right).$$

Donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{b}{y - \frac{a}{2}}.$$

Écrivons que cette dérivée en  $y_2$  vaut  $m$  :

$$m = \frac{b}{y_2 - \frac{a}{2}}.$$

On en tire

$$y_2 - \frac{a}{2} = \frac{b}{m}.$$

Remplaçons dans l'expression de  $x_2 = \frac{(y_2 - \frac{a}{2})^2}{2b}$  :

$$x_2 = \frac{b}{2m^2}.$$

Finalement, remplaçons dans l'expression de (1.7)

$$m = \frac{\frac{a}{2} + \frac{b}{m} - \frac{m^2}{2}}{\frac{b}{2m^2} - m} = \frac{m(2b + am - m^3)}{b - 2m^3}.$$

Donc  $m$  est solution de

$$m(2b + am - m^3) - m(b - 2m^3) = m(m^3 + bm + a) = 0.$$

De par la forme des paraboles il est aisé de voir que la solution  $m = 0$  est exclue, car la deuxième parabole n'a aucun point en lequel la tangente est horizontale. C'est-à-dire que  $m$  est solution d'une équation du troisième degré! Suivant les valeurs de  $a$  et  $b$ , l'équation  $m^3 + bm + a = 0$  peut avoir une ou trois racines réelles (et éventuellement une racine simple et une racine double), ce qui traduit le fait que selon les valeurs de  $a$  et  $b$  les paraboles peuvent avoir une ou trois droites tangentes conjointes. En comparaison les constructions à la règle et au compas ne permettent que de trouver les solutions des équations du premier ou deuxième degré et ne permettraient donc pas, en général, de tracer une tangente commune à deux paraboles.

## 1.8 L'équation générale d'une conique

L'équation générale d'une conique est de la forme  $P(x, y) = 0$ , où

$$P(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ex + F = 0 \quad (1.8)$$

et au moins un des coefficients  $A, B, C$  est différent de 0. La conique peut être

- (i) une parabole,
- (ii) une ellipse (incluant le cas particulier du cercle),
- (iii) une hyperbole,
- (iv) deux droites sécantes, comme par exemple  $xy = 0$ ,
- (v) deux droites parallèles, comme par exemple  $x(x - 1) = 0$ ,
- (vi) une droite double, comme par exemple  $x^2 = 0$ ,
- (vii) un point, comme par exemple  $x^2 + y^2 = 0$ ,
- (viii) l'ensemble vide, comme par exemple  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ .

L'équation (1.8) est obscure : elle cache la géométrie et la nature de la conique. Nous allons mettre nos « lunettes mathématiques », et apprendre à décider quel est le cas qui s'applique à une équation donnée.

**Premier test : le nombre de branches à l'infini** Ces coniques peuvent être divisées en 2 grandes classes suivant ou non qu'elles ont au moins une branche à l'infini. Ainsi, ce sont exactement les coniques des cas (i), (iii), (iv), (v), (vi) qui ont au moins une branche à l'infini (ou direction asymptotique). Les directions des branches à l'infini (ou directions asymptotiques) sont données par les termes de plus haut degré et donc par les solutions de l'équation  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$  et on a 3 cas suivant la valeur du discriminant  $\Delta = B^2 - 4AC$ .

- $\Delta > 0$  : on a deux directions asymptotiques à l'infini (cas (iii) et (iv));
- $\Delta = 0$  : on a une direction double à l'infini (cas (i), (v) et (vi));
- $\Delta < 0$  : on n'a aucune direction à l'infini (cas (ii), (vii) et (viii)).

**Deuxième étape : faire une rotation des coordonnées pour se ramener à une nouvelle forme dans laquelle le coefficient B est nul.** Une rotation d'angle  $\theta$  est une transformation linéaire. Elle est donnée par

$$(x, y) \mapsto (x', y') = (\cos\theta x - \sin\theta y, \sin\theta x + \cos\theta y).$$

Il est plus facile de travailler avec l'écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En effet, comme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(ce qui traduit le fait que l'inverse d'une rotation d'angle  $\theta$  est une rotation d'angle  $-\theta$ ) ceci nous donne l'écriture de  $x, y$  en fonction de  $x', y'$  :

$$(x, y) = (\cos\theta x' + \sin\theta y', -\sin\theta x' + \cos\theta y').$$

Substituons ceci dans (1.8). On obtient :

$$A(\cos\theta x' + \sin\theta y')^2 + B(\cos\theta x' + \sin\theta y')(-\sin\theta x' + \cos\theta y') + C(-\sin\theta x' + \cos\theta y')^2 + D(\cos\theta x' + \sin\theta y') + E(-\sin\theta x' + \cos\theta y') + F = 0.$$

Seuls les termes de la première ligne sont quadratiques. Ils sont de la forme  $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2$  pour

$$\begin{cases} A' = A \cos^2 \theta - B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta, \\ B' = 2A \cos \theta \sin \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2C \cos \theta \sin \theta, \\ C' = A \sin^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta + C \cos^2 \theta. \end{cases}$$

Nous cherchons  $\theta$  pour que  $B' = 0$ , où

$$B' = 2(A - C) \cos \theta \sin \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).$$

L'expression se simplifie si on utilise les formules trigonométriques

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \\ \sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta. \end{cases}$$

Alors  $B' = (A - C) \sin 2\theta + B \cos 2\theta$  et l'équation  $B' = 0$  se ramène à

$$\begin{cases} \tan 2\theta = \frac{B}{C-A}, & C - A \neq 0, \\ \cos 2\theta = 0, & C - A = 0. \end{cases}$$

Une solution de la première équation est donnée par  $\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{B}{C-A}\right)$ , et une solution de la deuxième par  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , puisque  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ . Dans ces nouvelles coordonnées la conique a une équation de la forme  $P'(x', y') = A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$  et on a  $\Delta' = -4A'C'$ . On a donc

$$\Delta' \begin{cases} = 0, & \text{si } A' = 0 \text{ ou } C' = 0, \\ > 0, & \text{si } A' > 0, C' < 0 \text{ ou } A' < 0, C' > 0, \\ < 0, & \text{si } A', C' > 0 \text{ ou } A', C' < 0. \end{cases}$$

On va maintenant effectuer une translation des coordonnées pour éliminer (autant que possible) les termes linéaires.

**Translation des coordonnées.** La translation des coordonnées est choisie par la complétion des carrés et justifiée par les formules suivantes

$$\begin{cases} A'x'^2 + D'x' = A' \left(x' + \frac{D'}{2A'}\right)^2 - \left(\frac{D'}{2A'}\right)^2, & \text{si } A' \neq 0, \\ C'y'^2 + E'y' = C' \left(y' + \frac{E'}{2C'}\right)^2 - \left(\frac{E'}{2C'}\right)^2, & \text{si } C' \neq 0. \end{cases}$$

Posons

$$x'' = \begin{cases} x' + \frac{D'}{2A'}, & A' \neq 0, \\ x', & A' = 0, \end{cases}$$

et

$$y'' = \begin{cases} y' + \frac{E'}{2C'}, & C' \neq 0, \\ y', & C' = 0. \end{cases}$$

1. Le cas  $A'C' \neq 0$ . Dans les coordonnées  $x'', y''$  l'équation  $P'(x', y') = 0$  devient

$$A'x''^2 + C'y''^2 + F'' = 0,$$

où

$$F'' = F - \left(\frac{D'}{2A'}\right)^2 - \left(\frac{E'}{2C'}\right)^2.$$

Dans le cas où  $F'' \neq 0$  on peut diviser par  $|F''|$  pour obtenir la forme canonique d'une ellipse ou d'une hyperbole ou encore l'ensemble vide si  $A', C', F'' > 0$ .

Résumons les différents cas :

- $A', C', F'' > 0$  ou  $A', C', F'' < 0$  : l'ensemble vide (cas (viii));
- $A', C' > 0, F'' < 0$  ou  $A', C' < 0, F'' > 0$  : une ellipse (un cercle dans le cas particulier  $A' = C'$ ) (cas (ii));
- $A'C' > 0, F'' = 0$  : un point (cas (vii));
- $A'C' < 0, F'' \neq 0$  : une hyperbole (cas (iii));
- $A'C' < 0, F'' = 0$  : deux droites sécantes (cas (iv));

2. Le cas  $A' = 0, C' \neq 0$ . L'équation a la forme

$$C'y''^2 + D'x' + F'' = 0,$$

où

$$F'' = F - \left( \frac{E'}{2C'} \right)^2.$$

Ici encore on a quatre cas possibles selon que  $D'$  et  $F''$  s'annulent ou pas.

- $D' \neq 0$  : une parabole (cas (i)). Remarque : une translation en  $x$  permettrait d'éliminer le terme constant et de trouver le sommet de la parabole.
- $D' = 0$  et  $C'F'' < 0$  : deux droites parallèles (cas (v));
- $D' = 0$  et  $C'F'' > 0$  : l'ensemble vide (cas (viii));
- $D' = F'' = 0$  : une droite double (cas (vi)).

3. Le cas  $C' = 0, A' \neq 0$ . Il est similaire (exercice).

## 1.9 Exercices

**Les coniques comme lieux géométriques. Les équations canoniques des coniques.**

1. Montrer que l'équation d'une parabole de sommet  $(h, k)$  et d'axe  $y = k$  est de la forme  $x - h = a(y - k)^2$ .

2. Montrer que si un point  $F$  est sur une droite  $(\Delta)$ , alors le lieu géométrique des points à égale distance de  $F$  et de  $(\Delta)$  est la droite  $(D)$  perpendiculaire à  $(\Delta)$  en  $F$ . (Ceci montre que la position limite d'une parabole lorsque le foyer  $F$  tend vers la directrice  $\Delta$  est l'axe de la parabole.

3. Trouver l'équation de la parabole de sommet  $(3, 4)$ , d'axe vertical, coupant l'axe des  $x$  aux points  $(1, 0)$  et  $(5, 0)$ .

4. Montrer la proposition 1.

5. Montrer la proposition 2.

6. Montrer que l'équation d'une ellipse centrée en  $(h, k)$  et de demi-axes  $a$  et  $b$  est de la forme  $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ .

**Le traçage des coniques**

7. Voici un outil ingénieux utilisé par les menuisiers pour tracer des ellipses. L'outil est une plaque carrée encavée de deux sillons en forme de croix sur lesquels se meuvent deux petits chariots. Le chariot étiqueté  $A$  ne peut se mouvoir que verticalement alors que l'autre ne bouge qu'horizontalement. Aux centres

des petits chariots sont fixées deux petites tiges sur lesquelles pivote un bras dans un plan parallèle au plan de l'outil. Le bras est rigide, et la distance entre les petites tiges, que nous appellerons A et B, est constante et égale à  $d = |AB|$ . La longueur totale du bras est L. À l'extrémité C du bras est fixée une pointe de crayon qui dessine une courbe (figure 1.13).

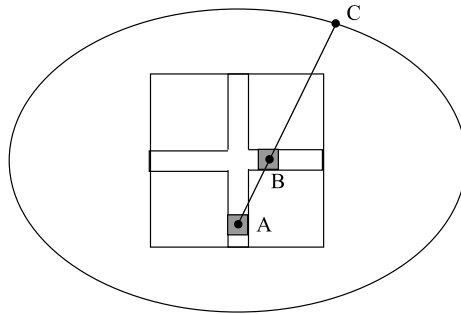


FIG. 1.13 – Un outil pour tracer une ellipse (exercice 1.9)

(a) Montrer que la courbe dessinée par la pointe de crayon quand les chariots se meuvent le long des sillons, entraînant la rotation du bras autour de A et de B, est une ellipse.

(b) Comment faut-il choisir  $d$  et  $L$  pour que l'ellipse tracée ait les demi-axes  $a$  et  $b$  ?

8. L'hyperbole est l'ensemble des points  $P$  du plan dont les distances à deux points  $F_1$  et  $F_2$  (les foyers de l'hyperbole) ont une différence, en valeur absolue, égale à une constante  $C$  :

$$||F_1P| - |F_2P|| = C. \quad (1.9)$$

Voici comment on peut dessiner une première branche de l'hyperbole avec une règle, une corde et un crayon. La règle pivote autour d'un clou planté au premier foyer  $F_1$  de l'hyperbole. À l'extrémité A de la règle, on fixe une corde dont l'autre extrémité est fixée au deuxième foyer  $F_2$  de l'hyperbole. La corde est de longueur  $\ell$ . On place le crayon le long de la règle de telle manière qu'il tende la corde (figure 1.14).

(a) Montrer que la pointe du crayon décrit une branche d'hyperbole.

(b) De quelle longueur  $\ell$  doit être la corde si la longueur de la règle est  $L$  et que l'équation de l'hyperbole est donnée par (1.9) ?

(c) Que devez-vous faire pour tracer la deuxième branche de l'hyperbole ?

9. Voici un dispositif pour tracer une parabole. On fixe une règle le long d'une droite (D). On fait glisser une équerre de hauteur  $h = AB$  le long de la règle



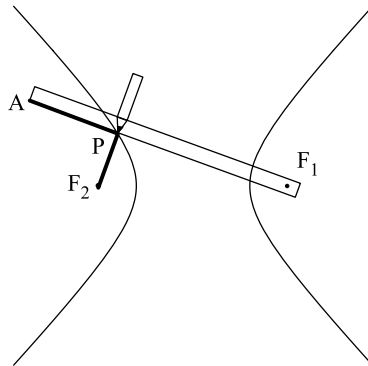


FIG. 1.14 – Le traçage de l'hyperbole (exercice 1.9)

(voir la figure 1.15). Une corde de longueur  $L$  est attachée par une extrémité à un point fixe  $O$  situé à la distance  $h_1$  de la droite  $(D)$ . L'autre extrémité de la corde est attachée au sommet  $A$  de l'équerre. La pointe du crayon est placée le long du côté vertical de l'équerre en un point  $P$  de telle sorte que la corde soit tendue : on a donc  $|AP| + |OP| = L$ . On pose  $h_2 = h - h_1$ .

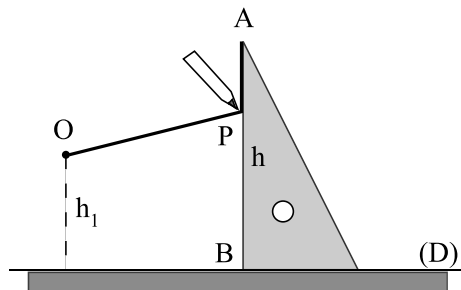


FIG. 1.15 – Le traçage de la parabole (exercice 1.9)

- Si  $L > h_2$ , montrer que la pointe du crayon décrit un arc de parabole. (Suggestion : prendre un système d'axes centré en  $O$  et appeler  $(x, y)$  les coordonnées de  $P$ .)
- Montrer que le foyer de la parabole est en  $O$ .
- Montrer que l'arc de parabole qu'on peut tracer est tangent à la droite  $(D)$  si  $h_1 = \frac{L-h_2}{2}$ . Dans ce cas, trouver la directrice de la parabole.
- Montrer que le sommet de la parabole est une extrémité de l'arc de parabole que l'on peut tracer si et seulement si  $\frac{L-h_2}{2} \leq h_1$ .

### Les miroirs de forme conique

**10. La propriété optique de l'hyperbole** Soit (D) une droite joignant un point P d'une branche d'hyperbole au foyer situé à l'intérieur de cette branche. Soit (D') la droite symétrique de (D) par rapport à la tangente à l'hyperbole en P. Montrer que (D') passe par l'autre foyer de l'hyperbole (voir la figure 1.7).

### Les équations des coniques en coordonnées polaires. L'excentricité

**11.** Quel est l'ensemble des valeurs de  $\theta$  admissibles dans l'équation en coordonnées polaires d'une branche d'hyperbole dans un repère centré à un foyer ? À quoi correspondent les valeurs limites ?

**12.** Montrer que pour une ellipse, l'excentricité est le quotient de la distance entre les foyers par la longueur du grand axe. Calculer l'excentricité de l'ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**13.** Calculer l'excentricité de l'hyperbole  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

### Les applications de l'hyperbole aux problèmes de positionnement

**14.** Le système Loran (pour « Long Range ») a longtemps été utilisé en navigation, en particulier sur la côte américaine. Comme plusieurs bateaux ont encore des récepteurs Loran, le système n'a pas encore été démantelé, même si de plus en plus de bateaux ont maintenant des GPS. Les stations émettrices pour le système Loran sont regroupées par chaînes de trois à cinq. Chaque chaîne comporte une station maître ou principale M et plusieurs stations asservies ou secondaires : W, X, Y, Z.

- La station principale envoie un signal.
- La station W reçoit le signal, attend une durée pré-établie et renvoie le même signal.
- La station X reçoit le signal, attend une durée pré-établie et renvoie le même signal.
- etc.

Les durées pré-établies sont choisies de telle sorte que l'on ne puisse avoir de doute sur la station d'origine des signaux captés dans la zone couverte par ces stations. Ici, le principe est que le récepteur Loran reçoit les signaux des stations émettrices et mesure le déphasage entre les signaux. Comme on a entre trois et cinq signaux, on a au moins deux déphasages indépendants.

(a) Expliquer comment, en connaissant deux déphasages, on peut déterminer sa position.

(b) En pratique, le déphasage entre la première antenne et la deuxième antenne permet de localiser le récepteur sur une branche d'hyperbole. Pourquoi ?

**Commentaire** Ces lignes hyperboliques de position sont dessinées sur les cartes marines. On connaît donc sa position sur une carte marine comme point d'intersection de deux branches d'hyperboles dessinées sur la carte.

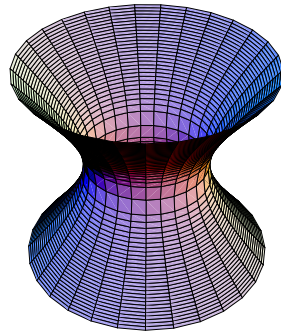


FIG. 1.16 – Un hyperboloïde de révolution à une nappe

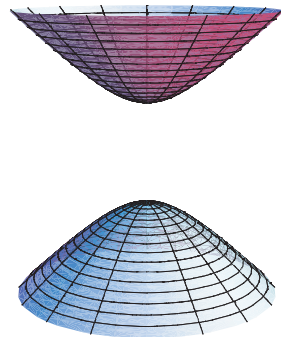


FIG. 1.17 – Un hyperboloïde de révolution à deux nappes

15. Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , quel est le lieu géométrique des points dont la différence des distances à deux points  $F_1$  et  $F_2$  est une constante ?
16. La surface d'équation  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  est un hyperboloïde à une nappe (figure 1.16). De quel ensemble de points est-il le lieu géométrique ? Cet exercice est plus difficile ! Suggestion : prendre des coupes par des plans  $Ax + By = 0$ .
17. La surface d'équation  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$  est un hyperboloïde à deux nappes (figure 1.17). ————— De quel ensemble de points est-il le lieu géométrique ? Suggestion : prendre des coupes par des plans  $Ax + By = 0$ .

bf Construire une conique en Origami

18. Faire la preuve du théorème 9.
19. Dans l'exercice 1.9, montrer que deux des droites  $(D_p)$  obtenues par pliage sont les asymptotes de l'hyperbole. Lesquelles ? Parmi les droites  $(D_p)$ , les-

quelles sont tangentes à la branche de droite et lesquelles sont tangentes à la branche de gauche.

**L'équation générale d'une conique**

20. Donner le type des coniques suivantes

a)  $x^2 - xy + 2y^2 - 3 = 0$ ,

b)  $xy - y^2 + x - 1 = 0$ ,

c)  $x^2 - 4xy + 4y^2 + 3x - 1 = 0$ ,

d)  $9x^2 + 6xy + y^2 - 3x - 1 = 0$ .

# Bibliographie

- [1] Alperin, Roger A., « A mathematical theory of Origami constructions and numbers », *New York Journal of Mathematics*, vol.6, 2000, p. 119–133.
- [2] Hull, Thomas. *Project Origami*, Wellesley, Massachussets, A.K. Peters, Ltd., 2006, 245 p.
- [3] Rousseau, Christiane et Yvan Saint-Aubin, *Mathématiques et technologie*, New York, Springer-Verlag, 2008, 600 p.

