Chapitre 1

La droite et le cercle

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie la droite et le cercle. On combinera des méthodes géométriques avec des méthodes de géométrie analytique.

Dans beaucoup de situations naturelles, la droite ou le cercle apparaissent régulièrement comme lieu géométrique.

DÉFINITION 1 *L'ensemble des points du plan ayant une propriété donnée est appelé* lieu géométrique *des points ayant cette propriété.*

Dans tout ce chapitre on note par $|AB|$ la longueur du segment d'extrémités A et B.

1.2 La droite

Équations paramétriques d'une droite La droite passant par $A = (x_0, y_0)$, de vecteur directeur $v = (v_1, v_2)$ est l'ensemble des points $P(t) = (x(t), y(t))$ de la forme $P(t) = (x_0, y_0) + tv$, $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des points $P(t) = (x(t), y(t))$ de la forme

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + tv_1, \\ y(t) = y_0 + tv_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

L'équation (1.1) est appelée *équation paramétrique* de la droite. Pour passer à l'équation régulière il faut éliminer t entre les deux équations. Multiplions par v_2 la première équation et par v_1 la deuxième, et soustrayons les. On obtient

$$v_2 x(t) - v_1 y(t) = v_2 x_0 - v_1 y_0.$$

que l'on peut encore écrire

$$v_2(x - x_0) - v_1(y - y_0) = 0.$$

PROPOSITION 1 *Étant donné une droite* (D) *d'équation* $ax + by + c = 0$, *la droite* (Δ) *perpendiculaire à* (D) *passant par le point* $P = (x_0, y_0)$ *a pour équation*

$$bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0.$$

La distance du point à la droite est donnée par

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

PREUVE Le vecteur $v = (a, b)$ est perpendiculaire à la droite (D). La droite (Δ) est donc la droite passant par P de vecteur directeur v.

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at, \\ y(t) = y_0 + bt. \end{cases}$$

Pour passer à l'équation régulière il faut éliminer t entre les deux équations. Multiplions par b la première équation et par a la deuxième, et additionnons les. On obtient

$$bx(t) - ay(t) = bx_0 - ay_0.$$

La distance de P à (D) est la longueur du segment PQ, où Q est la projection de P sur (D). Q est donc le point d'intersection de (D) et (Δ). Cherchons Q. Il est solution des équations

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0. \end{cases}$$

On peut par exemple utiliser la formule de Cramer pour la solution, ce qui donne

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ bx_0 - ay_0 & -a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ b & bx_0 - ay_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix}},$$

ou encore,

$$Q = (x_1, y_1) = \left(-\frac{ac - b(bx_0 - ay_0)}{a^2 + b^2}, -\frac{a(bx_0 - ay_0) + bc}{a^2 + b^2} \right).$$

On doit calculer $|PQ|$. Pour cela, remarquons que

$$\begin{cases} x_1 - x_0 = -\frac{a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}, \\ y_1 - y_0 = -\frac{b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

Alors,

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = \frac{(a^2 + b^2)(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}.$$

□

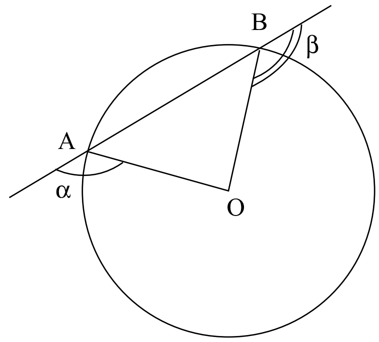


FIGURE 1.1 – La normale à un cercle passe par le centre du cercle.

1.3 Le cercle

DÉFINITION 2 *Le cercle de centre* O *et de rayon* R *est le lieu géométrique des points à distance* R *de* O.

THÉORÈME 1 *Étant donné un point* $O = (a, b)$, *l'équation du cercle de centre* O *et de rayon* R *est*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

PREUVE Soit $P = (x, y)$ un point du plan. Le vecteur OP a pour coordonnées $(x-a, y-b)$. Sa longueur $|OP|$ est égale à $|OP| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Alors, $|OP| = R$ si et seulement si $|OP|^2 = R^2$, c'est-à-dire $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. □

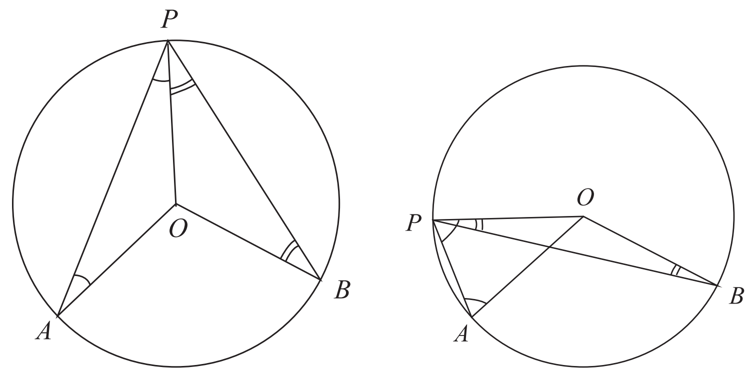
THÉORÈME 2 *Une droite tangente en un point* P *à un cercle de centre* O *est perpendiculaire au rayon* OP.

PREUVE Pour faire la preuve, il nous faut une définition de la tangente. Regardons la figure 1.1. Une tangente à un cercle est la position limite d'une sécante au cercle en deux points A et B lorsque les points sont confondus. Comme $|OA| = |OB|$, le triangle OAB est isocèle. On en conclut que $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$. Comme $\widehat{OAB} + \alpha = \pi$ et $\widehat{OBA} + \beta = \pi$, on conclut que $\alpha = \beta$. À la limite, lorsque A et B sont confondus, on aura les deux conditions

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha + \beta = \pi. \end{cases}$$

On conclut qu'à la limite, $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$. □

PROPOSITION 2 *Étant donné un cercle de rayon* R *et un angle au centre dont la mesure en radians est égale à* α, *la longueur de l'arc de cercle sous-tendu par cet angle est égal à* $R\alpha$.



(a) Le centre du cercle est à l'intérieur du triangle APB.

(b) Le centre du cercle est à l'extérieur du triangle APB.

FIGURE 1.2 – Un angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre associé.

PREUVE On fait simplement une règle de trois : la longueur du cercle est $2\pi R$ pour un angle au centre de 2π en radians. Pour un angle au centre de α, on obtient donc $2\pi R \frac{\alpha}{2\pi} = R\alpha$. □

1.4 Quelques lieux géométriques

THÉORÈME 3 *L'ensemble des points du plan à égale distance de deux points* A *et* B *est la* médiatrice *du segment* AB. *Celle-ci est définie comme la droite perpendiculaire au segment* AB *et passant par son milieu.*

THÉORÈME 4 *L'ensemble des points du plan à égale distance de deux demi-droites* (D_1) *et* (D_2) *issues d'un même point* P *est la* bissectrice *de l'angle formé par ces deux demi-droites.*

1.5 Arc capable

La question qui nous intéresse est la suivante : si A et B sont deux points donnés distincts du plan, quel est le lieu géométrique des points P du plan tel que l'angle orienté $\angle APB$ a une valeur donnée α ? On va montrer que ce lieu géométrique est un arc de cercle, appelé *arc capable*. Pour cela il nous faut commencer par nous rappeler une propriété des angles inscrits dans un cercle.

THÉORÈME 5 *Dans un cercle de centre* O, *un angle inscrit* $\angle APB$ *est égal à la moitié de l'angle au centre associé* $\angle AOB$ *(voir figure 1.2). Dans le cas particulier où* AB *est un diamètre du cercle, alors l'angle* $\angle APB$ *est un angle droit.*

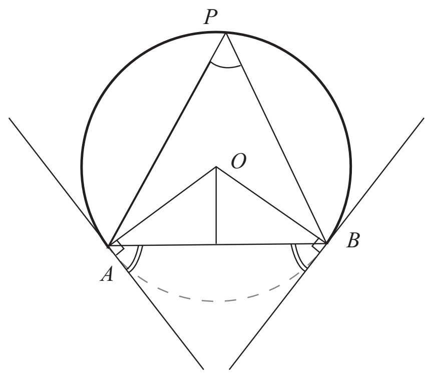


FIGURE 1.3 – L'arc capable de l'angle orienté α, dont la mesure est celle de $\angle APB$.

PREUVE On a $|OA| = |OB| = |OP| = R$, où R est le rayon du cercle. Donc les triangles OAP et OPB sont isocèles. On en tire $\angle OPA = \angle OAP$ et $\angle OPB = \angle OBP$. Alors, comme la somme des angles dans un triangle vaut π,

$$\begin{cases} \angle POA = \pi - 2\angle APO, \\ \angle POB = \pi - 2\angle BPO. \end{cases} \tag{1.2}$$

Aussi $\angle AOB = 2\pi - \angle POA - \angle POB$.

En remplaçant (1.2), on obtient

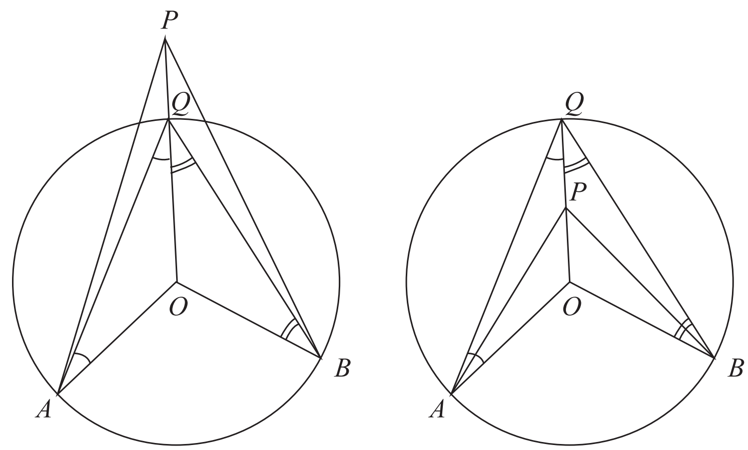
$$\begin{aligned} \angle AOB &= 2\pi - (\pi - 2\angle APO) - (\pi - 2\angle BPO) \\ &= 2(\angle APO + \angle POB) \\ &= 2\angle APB. \end{aligned}$$

□

THÉORÈME 6 *Le lieu géométrique des points* P *du plan tel que l'angle orienté* $\angle APB$ *a une valeur donnée* α *est un arc de cercle d'extrémités* A *et* B. *Le centre du cercle,* O, *est sur la médiatrice de* AB. *Les tangentes au cercle en* A *et* B *font un angle* α *avec la droite* AB. *Le centre* O *est aussi sur la perpendiculaire à ces tangentes passant par* A *et* B *(voir figure 1.3).*

PREUVE Par la construction décrite dans l'énoncé, on sait que $\angle OAB = \angle OBA = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Donc, $\angle AOB = \pi - 2(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2\alpha$. Par le théorème 5, on a donc que sur l'arc, alors $\angle APB = \alpha$.

Il faut aussi voir que si P est ailleurs que sur cet arc, $\angle APB \neq \alpha$. Remarquons que si P est de l'autre côté de la droite AB, alors l'angle orienté $\angle APB$ change de signe. Donc, P n'est pas admissible. On peut montrer que si P est à l'extérieur du cercle, alors $\angle APB < \alpha$, et si P est à l'intérieur du cercle, alors $\angle APB > \alpha$ (voir figure 1.4).



(a) P est à l'extérieur du cercle. (b) P est à l'extérieur du cercle.

FIGURE 1.4 – Si P n'est pas sur l'arc capable, alors $\angle APB \neq \alpha$.

Prenons le premier cas, quand P est à l'extérieur du cercle, et soit Q le point d'intersection de la droite PO avec le cercle. On sait que $\angle AQB = \alpha$. Il faut donc montrer que $\angle APB < \angle AQB$. Or

$$\begin{aligned} \angle AQO &= \pi - \angle AQP = \pi - (\pi - \angle QAP - \angle APQ) \\ &= \angle QAP + \angle APQ < \angle APQ = \angle APO. \end{aligned}$$

De même $\angle BQO < \angle BP0$. Donc,

$$\angle APB = \angle AP0 + \angle BPO < \angle AQ0 + \angle BQO = \angle AQB = \alpha.$$

Le cas où P est à l'intérieur du cercle se fait de la même manière et nous le laissons comme exercice. □

1.6 Exercices

1. Montrer que l'équation de la droite passant par deux points distincts (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est donnée par $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, si $x_1 \neq x_2$. Donner son équation paramétrique.

2. On considère la droite d'équation $y = mx + b$. Donner une équation paramétrique de cette droite.

3. Quels sont le centre et le rayon des cercles suivants :

a) $x^2 + 2x + y^2 - 6y + 9 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + 4x + 5y + 8 = 0$;
c) $2x^2 + x + 2y^2 - \frac{1}{8} = 0$;
d) $x^2 + y^2 - x = 0$?

4. Quelle est l'équation du cercle centré en $(2, 3)$ et tangent à la droite $2x + y - 5 = 0$?

5. Les grecs anciens se servaient des éclipses pour évaluer des rapports de distance d'objets célestes. En prenant l'origine des coordonnées au centre de la Terre, on peut supposer que le soleil et la lune décrivent des orbites circulaires centrées à l'origine et situées dans un même plan. Soit R_L, le rayon de la lune, R_T, celui de la Terre et R_S, celui du soleil. Soit d_1, la distance Terre-lune, et d_2, la distance Terre-soleil.

(a) Une éclipse de soleil est causée par le passage de la lune devant le soleil. Lors de ce passage, la lune a l'air d'avoir le même rayon que le soleil, et donc, de le cacher exactement. Faire un dessin de la position des trois objets célestes. En tirer une relation unissant R_L, R_S, d_1 et d_2.

(b) Lors d'une éclipse de lune, c'est la Terre qui projette son ombre sur la lune : elle se trouve entre le soleil et la lune. Encore une fois, l'ombre projetée de la Terre a environ la taille de la lune. Faire un dessin de la position des trois objets célestes. En tirer une relation unissant R_L, R_T, R_S, d_1 et d_2.

6. Les grecs anciens savaient que la Terre était une sphère. Le Grec Ératosthène a utilisé le stratagème suivant pour calculer la circonférence de la Terre. Il avait remarqué qu'au solstice d'été à midi, le soleil se reflétait au fond d'un puits situé à Syène, dans le Sud de l'Egypte. Ceci signifiait que le soleil était exactement à la verticale dans cette ville. Il savait qu'Alexandrie était située directement au nord de Syène. Au solstice d'été, à midi, il a mesuré l'angle du soleil avec la verticale à Alexandrie : pour cela, il a mesuré la taille de l'ombre d'un obélisque dont il connaissait la hauteur. Cet angle était de $7,2\,^\circ$. Il a mesuré que la distance entre Syène et Alexandrie était de 5000 stades. Faire un dessin. Sachant que la longueur d'un stade était de 157,5 m, refaire les calculs d'Érathosthène pour trouver la valeur approximative de la circonférence terrestre qu'il avait calculée.

7. Si on prend comme valeur du rayon de la Terre $R = 6368$ km, à quelle distance sur un méridien correspond un degré de latitude ?

8. Voici un moyen de mesurer (très approximativement) le rayon R de la Terre. Vous montez sur une montagne de hauteur h et vous mesurez l'angle α d'une longue vue avec la verticale lorsque vous observez l'horizon (pour cela on suppose que le ciel est très clair et que vous pouvez voir aussi loin que possible). Faire un dessin. Calculer R en fonction de h et α. Calculer la valeur approchée de R si la montagne est l'Everest, donc $h = 8800$ m, et si $\alpha = 86,99^o$.

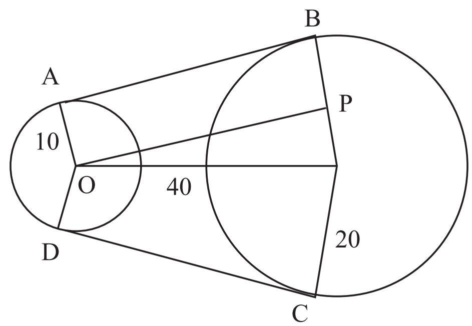


FIGURE 1.5 – Les deux poulies de l'exercice 1.6

9. Sachant que Montréal est située à $45,5\,°$ de latitude Nord et $73,6\,°$ de longitude Ouest et Vancouver à $49,2\,°$ de latitude Nord et $123,1\,°$ de longitude Ouest, quelle est la distance minimale à parcourir sur la Terre pour aller de Montréal à Vancouver, si on prend comme valeur du rayon de la Terre $R = 6368$ km ?
Suggestion : calculer l'angle entre le vecteur joignant le centre de la Terre à Montréal et le vecteur joignant le centre de la Terre à Vancouver.

10. Sachant que Montréal est située à $45,5\,°$ de latitude Nord et $73,6\,°$ de longitude Ouest et Canberra (Australie) à $35,3\,°$ de latitude Sud et $149,1\,°$ de longitude Est, quelle est la distance minimale à parcourir sur la Terre pour aller de Montréal à Canberra, si on prend comme valeur du rayon de la Terre $R = 6368$ km ?

11. Une bicyclette a des roues de 700 mm de diamètre. Si le plateau avant a 52 dents et le plateau arrière a 14 dents, c'est-à-dire que la roue fait $\frac{52}{14}$ tours pour chaque tour de pédale, combien de coups de pédales sont nécessaires pour parcourir 100 km ?

12. Les centres de deux poulies sont éloignés de 40 cm. Le rayon de la petite poulie est de 10 cm, et celui de la grande de 20 cm (voir figure 1.5). Quelle est la longueur de la courroie qui les entoure ?
Suggestion : Mener OP parallèle à AB.

13. On se donne trois poulies de rayon 10 cm, dont les centres sont au sommet d'un triangle isocèle, dont le petit côté a longueur 60 cm et la hauteur a longueur 70 cm (figure 1.6). Calculer la longueur de la courroie qui les entoure.

14. Une île rocheuse est bordée de falaises verticales de 1000 m de hauteur. Vous êtes à bord d'une embarcation. Quelle distance minimale devez-vous par-

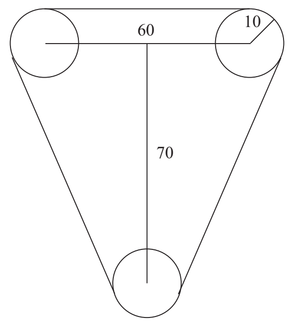


FIGURE 1.6 – Les trois poulies (exercice 1.6)

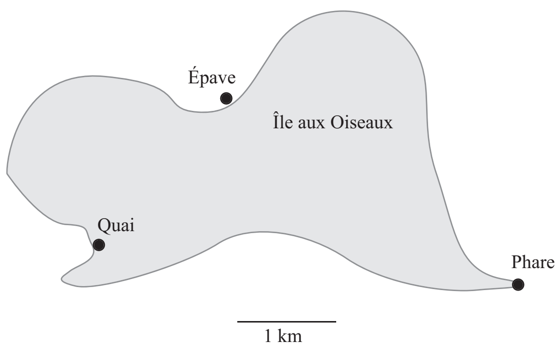


FIGURE 1.7 – La carte de l'Île aux Oiseaux (exercice 1.6)

courir pour que l'île disparaisse de votre champ de vision à cause de la rotondité de la Terre, en supposant que le rayon de la Terre est de 6368 km ?

15. Vous avez trouvé dans une bouteille à la mer une carte de l'Île aux Oiseaux (voir figure 1.7) et les indications suivantes : le trésor est caché à égale distance du quai et de l'épave et à 4 km du phare. Expliquez comment vous le trouvez.

16. Un trésor est caché à égale distance du Fort et du Phare (voir Figure 1.8). Il est à la même latitude que le Phare. Localiser ce point. On approxime la sphère terrestre par un plan comme sur la carte. Donner la longitude et la latitude du trésor.

17. Un trésor est caché sur l'île, à la longitude 65º O (voir Figure 1.8). De plus, il est situé sur le cercle passant par les trois points donnés par le Fort, la Butte et le Phare. On approxime la sphère terrestre par un plan comme sur la carte. Expliquer comment localiser géométriquement ce point. Donner sa longitude et sa latitude.

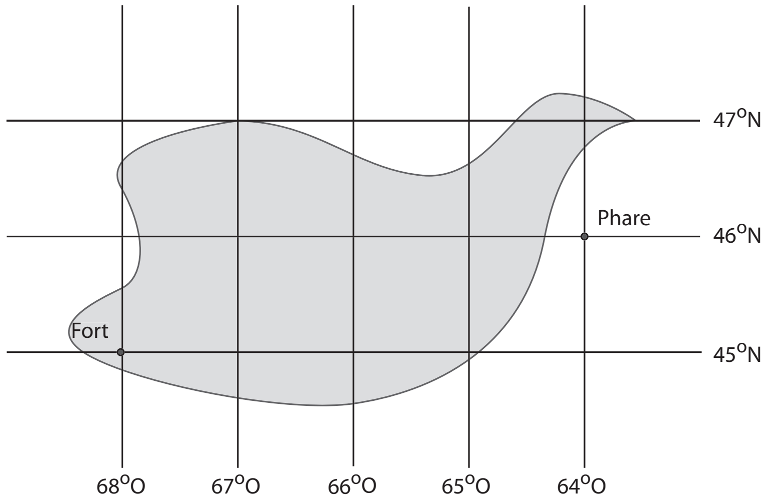


FIGURE 1.8 – La figure des exercices 1.6 et 1.6

18. Un trésor est caché sur l'île, à égale distance du Fort, du Phare et du Camp (voir Figure 1.9). Expliquez comment vous le trouvez. Donnez la longitude et la latitude de sa position.

19. Le triangle de Reuleaux (figure 1.10) est construit en prenant trois arcs de cercle de rayon R centrés en chacun des sommets d'un triangle équilatéral de côté R.

(a) Calculer le périmètre du triangle de Reuleaux.

(b) Calculer sa surface.

(c) Montrer que triangle de Reuleaux est de ≪ largeur constante ≫ égale à R, c'est-à-dire que, quelles que soient deux droites parallèles situées de part et d'autre du triangle et touchant au triangle, la distance entre les deux droites est égale à R. (C'est cette dernière propriété qui a fasciné les ingénieurs de Mazda qui ont utilisé cette forme dans leur moteur rotatif.)

20. Étant donné deux points $A = (a_1, b_1)$ et $B = (b_1, b_2)$ distincts, donner l'équation de la médiatrice du segment AB.

21. Donner une construction à la règle et au compas permettant de tracer la médiatrice d'un segment AB.

22. Donner une construction à la règle et au compas permettant de tracer la parallèle à une droite (D) passant par un point P donné.

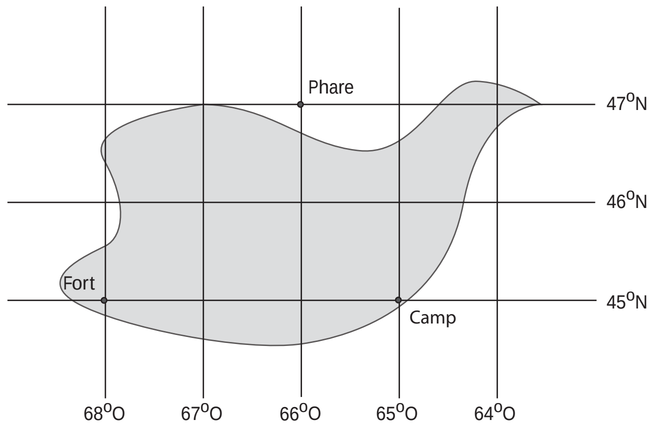


FIGURE 1.9 – La figure de l'exercice 1.6

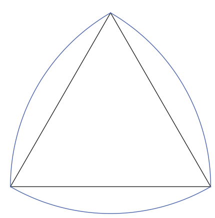


FIGURE 1.10 – Le triangle de Reuleaux de l'exercice 1.6

23. Donner une construction à la règle et au compas permettant de tracer la bissectrice d'un angle.

24. Donner une construction à la règle et au compas permettant de tracer un triangle dont les côtés ont longueur α, β et γ. Combien de solutions trouvez-vous ? Quelles conditions doivent vérifier α, β, γ pour qu'elles existent ?

25. Donner une construction à la règle et au compas permettant de tracer un cercle passant par trois points du plan. Quelle condition doit-on mettre sur les trois points pour que la construction soit possible ?

26. Démontrer que le centre du cercle inscrit dans un triangle se trouve au point d'intersection des bissectrices des trois angles du triangle.

27. Étant donné deux vecteurs v et w de même origine O, donner une construction à la règle et au compas permettant de trouver l'extrémité du vecteur $v+w$.