Chapitre 1

Équivalences de champs de vecteurs

1.1 Introduction

La théorie qualitative des équations différentielles ordinaires décrit *qualitativement* les trajectoires des équations. Dire que deux équations différentielles ordinaires ont qualitativement les mêmes trajectoires, c'est dire qu'elles sont équivalentes sous une relation d'équivalence adéquate. Dans ce chapitre, nous allons voir qu'il faut plusieurs tâtonnements avant de définir les bonnes relations d'équivalence. Lorsqu'on a une relation d'équivalence, l'idéal est d'indentifier un représentant « canonique » de la classe d'équivalence. Par exemple, dans le cas de la relation d'équivalence donnant la similitude des matrices, deux matrices sont semblales si et seulement si elles ont la même forme de Jordan (modulo les symétries de cette forme de Jordan). De la même manière, mais seulement dans les cas les plus simples, on peut identifier un représentant canonique de la classe d'équivalence. La plupart des classes d'équivalence que nous considérerons seront locales, c'est-à-dire pour des germes d'équations différentielles ou de champs de vecteurs.

DÉFINITION 1 *Un* germe de champs de vecteurs en un point X_0 *est une classe d'équivalence de champs de vecteurs* $v : U \to \mathbb{R}^n$*, où* U *est un voisinage ouvert de* $\mathbb{R}^n$*, sous la relation d'équivalence suivante :* $v : U \to \mathbb{R}^n$ *est équivalent à* $w : U' \to \mathbb{R}^n$ *si et seulement si* $v \equiv w$ *sur* $U \cap U'$.

REMARQUE 1 *On définit de la même manière les germes de fonctions. Parler de germe en un point, plutôt que de fonction, libère de la contrainte de définir le domaine de définition, dont on sait seulement que c'est un voisinage du point.*

1.2 Le cas des systèmes linéaires

1.2.1 Equivalence linéaire

On considère un système linéaire

$$\dot{X} = AX,$$

où $X \in \mathbb{R}^n$ et A est une matrice $n \times n$ à entrées réelles. Un tel système est global.

Étant donné deux systèmes linéaires $\dot{X} = AX$ et $\dot{Y} = BY$ sur $\mathbb{R}^n$, il est naturel de se demander si le deuxième système peut se déduire du premier par un changement linéaire de coordonnées (qui préservera donc la forme du système). Essayons de poser $Y = SX$, où S est une matrice $n \times n$ inversible. Alors

$$\dot{Y} = S\dot{X} = SAX = (SAS^{-1})Y.$$

Donc, $B = SAS^{-1}$, c'est-à-dire que B est semblable à A. Par suite, A et B ont les mêmes valeurs propres et la même forme de Jordan.

Cette relation d'équivalence est très forte. Trop forte en fait : elle a beaucoup trop de classes d'équivalence. En effet, regardons deux champs de vecteurs linéaires de $\mathbb{R}^2$ ayant par exemple tous deux un point de selle, ou encore tous deux un foyer attractif avec une vitesse angulaire positive. Lorsqu'on regarde les trajectoires, on a envie de dire que les deux champs sont équivalents, même si les valeurs propres ne sont pas les mêmes. Il nous faut donc une relation d'équivalence plus faible.

1.2.2 Équivalence différentiable

À partir de maintenant, on va se contenter de relations d'équivalence locales : on voudra dire que deux champs de vecteurs ont, chacun restreint à un ouvert donné, la même organisation des trajectoires.

Puisqu'on travaille en classe de différentiabilité C^r où $r \geq 1$, on va considérer des transformations qui préservent la classe de différentiabilité. Ce seront, par exemple, des difféomorphismes de classe C^{r+1}. En effet, si $v(X)$ est un champ de vecteurs correspondant à une équation différentielle ordinaire $\dot{X} = v(X)$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et si $F : U' \subset U \to \mathbb{R}^n$ est un difféormorphisme de classe C^{r+1}, alors la transformée de l'équation différentielle par F est donnée par

$$\dot{Y} = DF(F^{-1}(Y))v(F^{-1}(Y)),$$

qui est bien de classe C^r. Ceci se vérifie en utilisant la règle de chaîne.

Le théorème de redressement (théorème **??** du chapitre **??**) montre que, si $v(X)$ et $w(Y)$ sont deux champs de vecteurs de classe C^r et $v(X_0) \neq 0, w(Y_0) \neq 0$, alors il existe des voisinages U_1 de X_0 et U_2 de Y_0 tels que $v|_{U_1}$ et $w|_{U_2}$ sont

C^{r-1}-équivalents, puisque C^{r-1}-équivalents au champ constant $(1, 0, \ldots, 0)$. Donc, le cas intéressant est le voisinage des points singuliers.

Soit X_0 un point singulier d'un champ de vecteurs $v(X)$, c'est-à-dire $v(X_0) = 0$. Alors, au voisinage de X_0, la formule de Taylor tronquée donne

$$v(X) = A(X - X_0) + f(X),$$

où $A = Dv(X_0)$ et $f(X) = o(|X - X_0|)$. Appliquons un difféomorphisme $Y = F(X)$ de classe C^2 au voisinage de X_0. Il est de la forme

$$Y = Y_0 + S(X - X_0) + G(X),$$

où $G(X) = O(|X - X_0|^2)$. Alors,

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= (S + DG(X))\dot{X} \\ &= SA(X - X_0) + Sf(X) + DG(X)(A(X - X_0) + f(X)). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Par le théorème des fonctions implicites on a que

$$X = X_0 + S^{-1}(Y - Y_0) + O(|Y - Y_0|^2)$$

puisqu'on sait que $D(F^{-1})(Y_0) = (DF(X_0))^{-1}$. Donc,

$$\dot{Y} = w(Y) = SAS^{-1}(Y - Y_0) + o(|Y - Y_0|).$$

Comme on pouvait s'y attendre, on voit qu'un difféomorphisme transformant un champ de vecteurs en un autre champ de vecteurs envoie un point singulier sur un point singulier. On voit aussi que la matrice jacobienne de w en Y_0 est semblable à la matrice jacobienne de v en X_0. Encore une fois on a une relation d'équivalence trop forte !

1.2.3 Équivalence topologique

Pour donner une relation d'équivalence plus faible on va abandonner la contrainte que F soit différentiable et seulement demander que F soit un homéomorphisme. Mais alors, comment fait-on pour transformer un champ de vecteurs différentiable par une application seulement continue ? En fait, on ne peut pas faire cela. Pourtant, cela a du sens de demander que F, qui est un homéomorphisme, transforme les trajectoires de v en trajectoires de w. Heureusement on a un autre outil qui nous permet d'exprimer ce concept sans dériver F : il s'agit du flot !

DÉFINITION 2 *Deux équations différentielles ordinaires* $\dot{X} = v(X)$ *et* $\dot{Y} = w(Y)$ *sont* topologiquement équivalentes *sur des ouverts* U *et* U' *s'il existe un homéomorphisme* $F : U \to U'$ *qui conjugue les flots de* v *et* w *:*

$$F \circ \Phi_v^t = \Phi_w^t \circ F,$$

dès que ces compositions sont définies :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Phi_v^t"'] & U' \arrow[d, "\Phi_w^t"] \\ U \arrow[r, "F"] & U' \end{tikzcd}$$

Cette relation d'équivalence convient : on peut montrer que deux champs de vecteurs linéaires de $\mathbb{R}^2$ ayant, par exemple, tous deux un point de selle, ou encore tous deux un foyer attractif avec une vitesse angulaire positive sont topologiquement équivalents. Mais elle nous réserve des surprises ! Les classes d'équivalence sont beaucoup plus grandes que ce qu'on prévoyait au début. Ainsi, tous les systèmes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ ayant un foyer attractif à vitesse angulaire positive, un noeud ou un foyer attractif à vitesse angulaire négative sont topologiquement équivalents. Dans le cas où toutes les valeurs propres ont des parties réelles non nulles, on a exactement $n+1$ classes d'équivalence correspondant au nombre de valeurs propres à partie réelle négative.

DÉFINITION 3 1. *Une matrice carrée* A *est* hyperbolique *si toutes ses valeurs propres ont des parties réelles non nulles.*

2. *Un point singulier d'un champ de vecteurs est* hyperbolique *si toutes les valeurs propres du linárisé du champ en ce point ont des parties réelles non nulles.*

THÉORÈME 1 *Deux équations différentielles linéaires* $\dot{X} = AX$ *et* $\dot{Y} = BY$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *à matrice hyperbolique sont topologiquement équivalentes si et seulement si les matrices* A *et* B *ont le même nombre de valeurs propres à partie réelle négative.*

PREUVE Soit n_+ (resp. n_-) le nombre de valeurs propres à partie réelle positive (resp. négative). Il suffit de montrer que chacun des systèmes est topologiquement équivalent au système produit

$$\begin{aligned} \dot{Z}_+ &= Z_+, \\ \dot{Z}_- &= -Z_-, \end{aligned} \tag{1.2}$$

où $Z_+ \in \mathbb{R}^{n_+}$ et $Z_- \in R^{n_-}$. Ce système est un représentant canonique de la classe d'équivalence. Nous allons le noter $\dot{Z} = CZ$, où $Z = (Z_+, Z_-)$. Nous montrerons que le système $\dot{X} = AX$ est topologiquement équivalent au système $\dot{Z} = CZ$ en plusieurs étapes :

(i) On peut appliquer une transformation linéaire et ramener le système $\dot{X} = AX$ à la forme

$$\dot{W} = BW = \begin{pmatrix} B_+ & 0 \\ 0 & B_- \end{pmatrix} W,$$

où B_+ (resp. B_-) est une matrice carrée $n_+ \times n_+$ (resp. $n_- \times n_-$) dont les valeurs propres ont des parties réelles positives (resp. négatives). La matrice B pourrait par exemple être une matrice de Jordan avec les blocs bien ordonnés, mais ce n'est pas nécessaire que ce soit le cas. Il suffit donc de montrer que le système $\dot{W} = BW$ est topologiquement équivalent au système $\dot{Z} = CZ$.

(ii) Posons $W = (W_+, W_-)$. Alors le système $\dot{W} = BW$ s'écrit aussi

$$\begin{aligned} \dot{W}_+ &= B_+ W_+, \\ \dot{W}_- &= B_- W_-. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Il est facile de vérifier que si F_+ (resp. F_-) est une équivalence topologique entre $\dot{W}_+ = B_+ W_+$ et $\dot{Z}_+ = Z_+$ (resp. $\dot{W}_- = B_- W_-$ et $\dot{Z}_- = Z_-$), alors $F = (F_+, F_-)$ est une équivalence topologique entre $\dot{W} = BW$ et $\dot{Z} = CZ$. (Exercice.)

(iii) Par (i) et (ii) il suffit de montrer le théorème pour une matrice B dont toutes les valeurs propres ont des parties réelles négatives. Ici, on va supposer que la matrice B est sous une forme pour laquelle la fonction $M(W) = |W|^2 = w_1^2 + \cdots + w_n^2$ est une fonction de Lyapunov (voir chapitre **??**), c'est-à-dire qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$-\alpha |W|^2 \leq L_B(M) \leq -\beta |W|^2, \tag{1.4}$$

où $L_B(M)$ est la dérivée de Lie de M le long du champ BW.

La fonction $M(Z) = |Z|^2$ est aussi une fonction de Lyapunov pour le champ $CZ = -Z$ et on a $L_C(M) = -|Z|^2$, où $L_C(M)$ est la dérivée de Lie de M le long du champ CZ.

Soit $\mathbb{S}^1$ la sphère unité. On définit F ainsi :

$$\begin{cases} F|_{\mathbb{S}^1} = id, \\ F(0) = 0, \\ F(W_1) = \Phi_C^t \circ F \circ \Phi_B^{-t}(W_1), \qquad \text{si } \Phi_B^{-t}(W_1) \in \mathbb{S}^1, \end{cases}$$

où Φ_B^t (resp. Φ_C^t) est le flot du champ $\dot{W} = BW$ (resp. $\dot{Z} = CZ = -Z$). F est globalement définie et bijective sur $\mathbb{R}^n$. En effet, soit $W_1 \neq 0$. Par (1.4), il existe t et $W_0 \in \mathbb{S}^1$ uniques tels que $W_1 = \Phi_B^t(W_0)$, On pose $F(W_1) = \Phi_C^t(W_0)$. Par construction, on a $F \circ \Phi_B^t = \Phi_C^t \circ F$ (exercice : écrire les détails). F est bien sûr inversible. Pour le montrer, le plus simple est de construire son inverse (exercice : écrire les détails). On a même que F est un difféomorphisme, puisque le flot est différentiable, sauf à l'origine. Il faut montrer que F est continue à l'origine. Soit $\epsilon > 0$. Puisque $L_C(M) = -|Z|^2$, il existe $T > 0$ tel que si $Z_0 = W_0 \in \mathbb{S}^1$, alors $|\Phi_C^T(Z_0)| < \epsilon$. Soit $\delta = \min_{W_0 \in \mathbb{S}^1} |\Phi_B^T(W_0)|$. Alors, si $|W_1| < \delta$, il existe $T_1 > T$ et $W_0 \in \mathbb{S}^1$ tels que $W_1 = \Phi_B^{T_1}(W_0)$. Donc, $F(W_1) = \Phi_C^{T_1}(W_0)$ et, par suite, $|F(W_1)| < \epsilon$, ce qui montre bien la continuité de F en 0. La continuité de F^{-1} en 0 se montre de la même manière.

(iv) En fait, il faut aussi montrer le théorème pour une matrice B dont toutes les valeurs propres ont des parties réelles positives. Exercice : expliquer comment déduire ceci de (iii). $\square$

1.3 Équivalence topologique orbitale

Par la suite, nous aurons besoin d'une relation déquivalence encore plus faible ! En effet, si deux systèmes sont topologiquement équivalents, l'homéomorphisme qui conjugue leurs flots envoie les orbites périodiques du premier sur les orbites périodiques du second. Mais, ceci n'est possible que lorsque les orbites périodiques ont même période ! Donc, par exemple, deux systèmes qui ont même organisation topologique des trajectoires et chacun un unique cycle limite globalement attractif ne sont pas topologiquement équivalents si leurs cycles limites n'ont pas la même période. Ils seront par contre topologiquement orbitalement équivalents au sens de la définition suivante.

DÉFINITION 4 *Deux équations différentielles ordinaires* $\dot{X} = \nu(X)$ *et* $\dot{Y} = w(Y)$ *sont* topologiquement orbitalement équivalentes *sur des ouverts* U *et* U' *s'il existe un homéomorphisme* $F : U \to U'$ *qui envoie les trajectoires de* ν *sur les trajectoires de* w *en préservant l'orientation des trajectoires mais pas nécessairement la paramétrisation.*

1.4 Systèmes dynamiques discrets et continus

DÉFINITION 5 *Un système dynamique est une paire* $\{U, \{\Phi^t\}_{t\in\mathcal{T}}\}$*, où* U *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *(ou plus généralement une variété différentiable), appelé espace des états, et* $\{\Phi^t\}_{t\in\mathcal{T}}$ *est une famille d'*opérateurs d'évolution, Φ^t*, de classe* C^1 *satisfaisant*

$$\Phi^0 = \mathrm{id}, \tag{1.5}$$

$$\Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s, \tag{1.6}$$

la dernière propriété étant valide lorsque la composition est définie.

Le système dynamique peut être discret *ou* continu.

DÉFINITION 6 *Une position d'équilibre d'un système dynamique* $\{U, \{\Phi^t\}_{t\in\mathcal{T}}\}$ *est un point* $X_0 \in U$ *tel que* $\Phi^t(X_0) = X_0$ *pour tout* $t \in \mathcal{T}$.

EXEMPLE 1 *La paire* $\{U, \{\Phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}\}$*, où* $\{\Phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *est l'application du flot d'une EDO de classe* C^1.

EXEMPLE 2 *La paire* $\{U, \{F^n\}_{n\in\mathbb{Z}}\}$*, où* $F : U \to \mathbb{R}^n$ *est un difféomorphisme de classe* C^1.

EXEMPLE 3 *La paire* $\{U, \{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}\}$*, où* $F : U \to \mathbb{R}^n$ *est de classe* C^1.

EXEMPLE 4 *Un exemple de système dynamique discret est donné par le flot d'une équation différentielle ordinaire* $\dot{X} = \nu(X)$ *en un temps* T *fixé,* Φ^T*. Regarder les itérées de* $F = \Phi^T$*, c'est-à-dire les composées*

$$F^n = \underbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}_{n}$$

revient à regarder l'évolution du système aux différents temps discrets $t_n = nT$. *On regardera aussi le cas* n *négatif, qui correspond à la* $|n|$*-ième itérée de* F^{-1}. *L'application* F *est un difféomorphisme.*

EXEMPLE 5 *Un autre exemple de système dynamique discret est donné par l'application de premier retour de Poincaré,* P, *définie au voisinage d'une solution périodique d'une EDO de classe* C^r. *Cette application est définie sur une section* Σ *de classe* C^r *transversale à la solution périodique. La solution périodique coupe la section* Σ *en un point* X_0 *qui est un point fixe de* P. *Voyons que cette application* P *est un difféomorphisme de classe* C^r. *On peut supposer que la section* Σ *est donnée par* $F(X) = 0$, *où* F *est de classe* C^r *au voisinage de* X_0. *Comme elle est transversale à la solution périodique en* X_0, *on a* $\nabla F(X_0) \cdot \nu(X_0) \neq 0$. *Comme dans le théorème de redressement, on fait un changement de variables* $X \mapsto (t, Y)$, *où* $Y \in V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *paramétrise un voisinage de* X_0 *dans* Σ *: le point de* Σ *paramétré par* Y *est alors donné par* $g(Y)$, *où* g *est de classe* C^r *et de rang* $n-1$, *et* $g(Y_0) = X_0$. *Alors, pour* $Y \in \Sigma$, $P(Y) = \Phi^t(Y)$ *où* t *est tel que* $F(\phi^t(g(Y))) = 0$. *On a* $F(\phi^{t_0}(g(Y_0)) = 0$. *Aussi* $\frac{\partial}{\partial t}(F(\phi^t(g(Y))))|_{(t_0,Y_0)} = \nabla F(\phi^{t_0}(X_0)) \cdot \nu(\phi^{t_0}(X_0) \neq 0$. *On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites et on trouve que* $F(\phi^t(X)) = 0$ *dans un voisinage de* X_0 *si et seulement si* $t = T(Y)$ *pour une fonction de classe* C^r *définie sur un voisinage* W *de* Y_0. *Alors* $P(Y) = \phi^{T(Y)}(Y)$ *est de classe* C^r *car composition de fonctions de classe* C^r. *Elle est inversible de par le théorème d'existence et d'unicité des solutions des EDO.*

EXEMPLE 6 *Dans le cas d'une équation différentielle non autonome* $\dot{X} = \nu(X, t)$, *où* $\nu(X, t+T) = \nu(X, t)$, *on regardera souvent les solutions aux instants* $t_0 + nT$, $n \in \mathbb{Z}$. *Ceci se fait en itérant l'application du flot* $\Phi^T_{t_0} = F$, *qui à la condition initiale* (X_1, t_0) *fait correspondre la solution au temps* $t_0 + T$.

PROPOSITION 1 *Soit* $\dot{X} = \nu(X)$ *une équation différentielle ordinaire de classe* C^1 *sur* U *et soit* $F = \Phi^T$ *le flot au temps* T. *Si* X_0 *est un point singulier de* ν, *alors* X_0 *est un point fixe de* F. *Si* $A = D\nu(X_0)$, *alors la partie linéaire de* F *en* X_0 *est* e^{AT}. *En particulier, si le point singulier* X_0 *est hyperbolique, alors la matrice* $DF(X_0)$ *n'a que des valeurs propres de module différent de* 1.

PREUVE Pour calculer la matrice jacobienne de F en X_0 il faut se rappeler la construction de F et de sa dérivée (voir chapitre **??**). On a

$$\Phi^T(X) = \lim_{m\to\infty} \Phi_m(X, T)$$

et

$$D\Phi^T(X) = \lim_{m\to\infty} \Psi_m(X, T)$$

où

$$\begin{cases} \Phi_0(X, t) = X, \\ \Psi_0(X, t) = I_n, \\ \Phi_{m+1}(X, t) = X + \int_0^t \nu(\Phi_m(X, s))\, ds, \\ \Psi_{m+1}(X, t) = I_n + \int_0^t D\nu(\Phi_m(X, s))\Psi_m(X, s)\, ds. \end{cases}$$

Calculons ces fonctions lorsque $X = X_0$. Alors, pour tout m et $s > 0$ on a $\Phi_m(X_0, s) = X_0$ et

$$\begin{aligned}
\Psi_0(X_0, T) &= I_n,\\
\Psi_1(X_0, T) &= I_n + AT,\\
\Psi_2(X_0, T) &= I_n + AT + \frac{A^2}{2!}T^2,\\
\vdots \quad & \quad \vdots\\
\Psi_m(X_0, T) &= I_n + \sum_{i=1}^{m} \frac{A^m}{m!}T^m,\\
\vdots \quad & \quad \vdots,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

DÉFINITION 7 *Soit* $F : U \to \mathbb{R}^n$ *une application de classe* C^1*, où* U *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*, et* X_0 *un point fixe de* F*. Le point fixe* X_0 *est* hyperbolique *si* $DF(X_0)$ *a toutes ses valeurs propres en dehors du cercle unité.*

THÉORÈME 2 *Soit* $F : U \to \mathbb{R}^n$ *une application de classe* C^1*, où* U *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*, et* X_0 *un point fixe hyperbolique de* F*, dont toutes les valeurs propres ont module inférieur à* 1*. Alors,* X_0 *est asymptotiquement stable, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage* V *de* X_0 *tel que, pour tout* $X_1 \in V$*,* $\lim_{m\to\infty} F^m(X_1) = X_0$*.*

PREUVE Au voisinage de X_0 le difféomorphisme a la forme

$$F(X) = X_0 + A(X - X_0) + o(|X - X_0|).$$

On peut bien sûr faire un changement linéaire de coordonnées (centré en X_0) et supposer que la matrice est obtenue de la matrice de Jordan en ramenant tous les coefficients hors diagonale à ϵ, et en se ramenant au cas réel dans le cas de blocs de Jordan complexes conjugués, c'est-à-dire que la matrice est bloc diagonale avec des blocs de la forme (λ), $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} \lambda & \epsilon & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & \epsilon & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Alors, si ϵ est assez petit, on aura que

$$\|A\| = \max_{x \in S^{n-1}} |AX| < 1.$$

Par continuité de DF, il existe un voisinage $V = B(X_0, r)$ de X_0 sur lequel $\|DF(X)\| \leq c < 1$. Alors, si $X \in V$,

$$|F(X) - X_0| \leq \max_{X \in V} \|DV(X)\| |X - X_0| \leq c|X - X_0|.$$

En itérant, on obtient

$$|F^n(X) - X_0| \le \max_{X \in V} \|DV(X)\| |X - X_0| \le c^n |X - X_0|,$$

d'où le résultat. □

Il existe un lien entre les exemples 5 et 6. En effet, supposons qu'ont ait une EDO autonome $\dot{X} = v(X)$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et que cette EDO ait une solution périodique $X(t) = Z(t)$ où $Z(t+T) = Z(t)$. On fait le changement de variables $Y = X - Z(t)$. Comme il dépend du temps, il transforme l'EDO autonome en une EDO non autonome, mais dépendant périodiquement du temps. On obtient

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= v(Y + Z(t)) - \dot{Z}(t) \\ &= v(Y + Z(t)) - v(Z(t)) \\ &= Dv(Z(t))Y(t) + O(|Y|^2). \end{aligned}$$

L'approximation linéaire est donc donnée par le système linéaire non autonome

$$\dot{Y} = Dv(Z(t))Y = A(t)Y, \tag{1.7}$$

qui est appelé *équation variationnelle* au voisinage de la solution périodique. On remplace $Y \in \mathbb{R}$ par une matrice $M \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ et on considère le système

$$\dot{M} = A(t)M$$

sous la condition initiale $M(0) = I$. Si T est la période du cycle, la matrice $M(T)$ est appelée la *matrice de monodromie du cycle*.

THÉORÈME 3 *Les valeurs propres de* $M(T)$ *sont* $1, \mu_2, \dots, \mu_n$*, où* $\mu_2, \dots, \mu_n$ *sont les valeurs propres de l'application de premier retour de Poincaré,* $P : \Sigma \to \Sigma$*, définie sur une section* Σ *transversale au cycle.*

PREUVE Soit X_0 le point d'intersection de la solution périodique avec Σ. Alors, $\Phi^T(X_0) = X_0$. Si l'on considère $Z_s(t) = Z(t+s)$, alors Z_s est une famille de solutions de l'EDO de condition initiale $Z(s)$ pour tout s. Donc, la fonction dérivée par rapport à la condition initiale, Z', est solution de l'équation variationnelle. On considère le vecteur $q = Z'(0)$: on a $M(T)q = q$. Donc, q est un vecteur propre de $M(T)$ associé à la valeur propre 1. On prend pour Σ' un sous-espace vectoriel passant par X_0 et perpendiculaire au sous-espace engendré par q. Ce sous-espace est transverse au flot sur un voisinage de X_0. On regarde l'application de premier retour de Poincaré définie sur un voisinage de X_0 dans Σ' comme dans l'exemple 5. Si Y est une paramérisation de Σ' et $T(Y)$ est le temps de premier retour, alors l'application de premier retour est définie comme $P(Y) = \Phi^{T(Y)}(Y)$. On s'intéresse à $DP(Y)$.

En deuxième étape on remarque que Les valeurs propres et la forme de Jordan de la matrice jacobienne de l'application de premier retour de Poincaré

P sont indépendantes de la section Σ choisie. En effet, soit Σ' une autre section transversale au champ et considérons la transition régulière $R : \Sigma \to \Sigma'$. Soit Q, l'application de premier retour de Poincaré définie sur Σ'. Alors, $Q = R \circ P \circ R^{-1}$. Soit X_0 et X_0' les points d'intersection de la solution périodique avec Σ et Σ' respectivement. On a $R(X_0) = X_0'$ et

$$DQ(X_0') = DR(X_0)\, DP(X_0)\, DR^{-1}(X_0').$$

Puisque $DR^{-1}(X_0') = (DR(X_0))^{-1}$, les deux matrices $DP(X_0)$ et $DQ(X_0')$ sont semblables. □

REMARQUE 2 *On parle aussi d'application de Poincaré dans le cas d'une EDO non autonome dépendant de manière périodique du temps*

$$\dot{X} = v(X, t), \qquad v(t + T) = v(t).$$

L'application de Poincaré est donnée par $P = \Phi_{t_0}^{T}$ *:* $P(X)$ *est le point au temps* $t_0 + T$ *de la solution de condition initiale* X *au temps* t_0*. Soit* X_0 *un point fixe de cette application. Alors, le théorème 3 se généralise à ce cas : on peut montrer, de même que ci-dessus, que* 1 *est une valeur propre de la matrice jacobienne de* P*. Ici encore, on peut remarquer que les valeurs propres et la forme de Jordan de la matrice jacobienne de l'application de Poincaré sont indépendantes de* t_0*.*

1.5 Théorème de Hartman-Grobman

Ce théorème affirme que si un champ de vecteurs a un point singulier hyperbolique, alors ce champ de vecteurs est toplogiquement équivalent à sa partie linéaire au voisinage du champ. Il existe deux versions de ce théorème, l'une pour les systèmes discrets (équations aux différences), l'autre pour les équations différentielles ordinaires. La plupart des preuves du théorème pour les équations différentielles ordinaires utilisent le théorème dans le cas discret.

L'importance du théorème de Hartman-Grobman vient du fait qu'il termine la classification topologique locale au voisinage des points singuliers hyperboliques. Commençons par un exemple montrant que l'hypothèse que le point singulier est hyperbolique est essentielle.

EXEMPLE 7 *Considérons le système*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x - y(x^2 + y^2). \end{aligned} \tag{1.8}$$

En coordonnées polaires, il devient

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -r^3, \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \tag{1.9}$$

et on voit que l'origine est un foyer faible. *On peut intégrer explicitement le système et voir que l'origine est asymptotiquement stable. Par contre, si l'on se limite au système linéarisé*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x, \end{aligned} \tag{1.10}$$

qui en coordonnées polaires a la forme

$$\begin{aligned} \dot{r} &= 0, \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \tag{1.11}$$

on voit que toutes les trajectoires sont périodiques : ce sont des cercles centrés à l'origine. Dans ce cas, on dit que l'origine est un centre. *Donc, le système total n'est pas topologiquement équivalent au système linéarisé.*

DÉFINITION 8 *Soit* $F : U \to \mathbb{R}^n$ *et* $G : U \to \mathbb{R}^n$ *deux difféomorphismes.* F *et* G *sont* topologiquement équivalents *s'il existe un homéomorphisme* $H : U \to U'$ *tels que* $F \circ H = H \circ G$.

THÉORÈME 4 *(Théorème de Hartman-Grobman pour les difféomorphismes) Soit* $F : U \to \mathbb{R}^n$ *un difféomorphisme de classe* C^1 *et* $X_0 \in U$ *un point fixe hyperbolique de* F. *Alors, il existe un voisinage* V *de* X_0 *sur lequel* F *est topologiquement équivalent à sa partie linéaire* $G(X) = X_0 + A(X - X_0)$ *pour* $A = DF(X_0)$.

THÉORÈME 5 *(Théorème de Hartman-Grobman pour les champs de vecteurs) Soit* $v : U \to \mathbb{R}^n$ *un champ de vecteurs de classe* C^1 *et* $X_0 \in U$ *un point singulier hyperbolique de* v. *Alors, il existe un voisinage* V *de* X_0 *sur lequel* v *est topologiquement équivalent au champ linéaire* $A(X - X_0)$ *pour* $A = Dv(X_0)$.

L'importance du théorème de Hartman-Grobman vient du fait qu'il termine la classification topologique locale au voisinage des points singuliers hyperboliques. Mais le fait qu'on se limite à une équivalence topologique a aussi ses limites. On va vouloir utiliser des théorèmes plus fins, et remplacer les homéomorphismes par des difféomorphismes de classe C^r, principalement lorsqu'on va regarder des questions globales ou encore analyser les bifurcations. Les hypothèses seront plus restrictives mais les conséquences beaucoup plus importantes. Comme la preuve de ces théorèmes n'utilisent pas le théorème de Hartman-Grobman, et que la preuve de ce théorème est longue et technique, nous allons la sauter. Montrons la puissance d'un théorème plus fin.

1.5.1 Étude d'une boucle homoclinique dans le plan

THÉORÈME 6 *On considère un champ de vecteurs* $\dot{X} = v(X)$ *dans un ouvert* $U \subset \mathbb{R}^2$ *avec un point de selle hyperbolique* X_0 *de valeurs propres* $\lambda_1 > 0$ *et* $\lambda_2 < 0$. *On suppose de plus que le champ a une boucle homoclinique passant par* X_0, *c'est-à-dire qu'il existe*

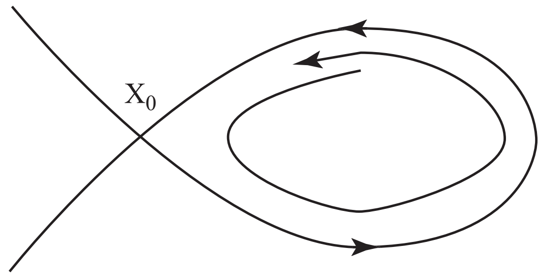

FIGURE 1.1 – Une boucle homoclinique attractive par un point de selle X_0

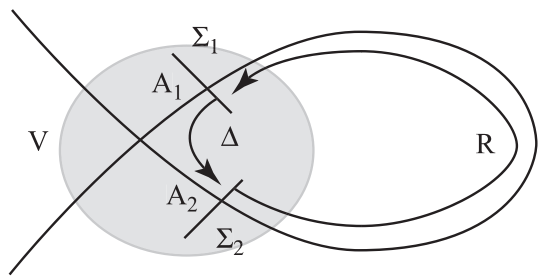

FIGURE 1.2 – Les sections Σ_i et les applications Δ et R

une trajectoire dont les ensembles α-limite et ω-limite sont X_0 (voir figure 1.1). On définit le rapport d'hyperbolicité r de X_0 comme

$$r = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|.$$

On suppose qu'il existe un difféomorphisme $Y = F(X)$ de classe C^1, défini sur un voisinage V de X_0, tel que $F(X_0) = 0$ et transformant l'EDO $\dot{X} = v(X)$ en le champ linéaire $Y = AY$, où $A = \left(\begin{smallmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{smallmatrix}\right)$.

Alors, si $r > 1$ la boucle homoclinique est attractive, et si $r < 1$, elle est répulsive. (Dire que la boucle homoclinique est attrative est dire que la réunion de la boucle et du point de selle est l'ensemble ω-limite d'un anneau à l'intérieur de la boucle dont la boucle homoclinique est la frontière.)

PREUVE Pour la preuve on considère des sections Σ_1 et Σ_2 parallèles aux axes dans les coordonnées $Y = (y_1, y_2)$. On considère une application de premier retour de Poincaré $P : \Sigma_1' \subset \Sigma_1 \to \Sigma_1$. Cette application est la composition de deux applications de transition (voir figure 1.2) :
- une application $\Delta : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, appelée application de Dulac ;
- une application *régulière* $R : \Sigma_2 \to \Sigma_1$.

On va ≪ calculer ≫ P. Remarquons que Σ_1 est paramétré par y_1 et que la boucle homoclinique correspond à $y_1 = 0$. On aura $P(0) = 0$. On peut prendre les coordonnées y_1, y_2, pour que $y_1, y_2 > 0$ à l'intérieur de la boucle. Pour montrer que la boucle est attractive (resp. répulsive), il suffit de montrer que $P(y_1) < y_1$ (resp. $P(y_1) > y_1$) pour $y_1 > 0$ assez petit.

Calcul de Δ. Dans les coordonnées y_1, y_2, le champ sur V s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1,\\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2.\end{aligned}$$

On a $\Sigma_1 = \{y_2 = a\}$ et $\Sigma_2 = \{y_1 = b\}$. L'EDO donne $\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\lambda_2 y_2}{\lambda_1 y_1}$ qu'on peut intégrer explicitement et on obtient

$$\int_a^{\Delta(y_1)} \frac{dy_2}{\lambda_2 y_2} = \int_{y_1}^{b} \frac{dy_1}{\lambda_1 y_1}.$$

On intègre et on prend l'exponentielle. On obtient, après réduction,

$$\Delta(y_1) = \left(a\, b^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right) y_1^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = C_1 y_1^r,$$

où $C_1, r > 0$.

Calcul de R. Dans les coordonnées originales X on va montrer que R est un difféomorphisme de classe C^1. En composant avec les changements de coordonnées vers les coordonnées y_2 et y_1 sur Σ_1 et Σ_2, on aura que R est encore un difféomorphisme de classe C^1.

Soit A_i, le point de rencontre de Σ_i avec la séparatrice de X_0. On sait que les trajectoires $\Phi^t(X_1)$ dépendent de manière C^1 de la condition initiale X_2 sur un voisinage de A_2. Par continuité des trajectoires en fonction de la condition initiale, pour chaque $X_2 \in \Sigma_2$, il existe $T(X_2) > 0$ minimum tel que $\Phi^{T(X_2)} \in \Sigma_1$. On veut montrer que $T(X_2)$ dépend de manière C^1 de X_2. Alors l'application R sera donnée par $R(X_2) = \Phi^{T(X_2)}$ sera de classe C^1. La fonction $T(X_2)$ peut être obtenue par le théorème des fonctions implicites, ce qui va assurer qu'elle est au moins de classe C^1. En effet, dans les coordonnées X, la section Σ_1 est, au voisinage de A_1, la courbe de niveau $F(X) = 0$ d'une fonction F de classe C^1. On cherche $T(X_2)$ solution de

$$F(\Phi^{T(X_2)}(X_2)) = 0.$$

Pour cela, on considère

$$G(X_2, t) = F(\Phi^t(X_2)),$$

et on sait que que $G(A_2, T_0) = 0$. De plus,

$$\left.\frac{\partial G}{\partial t}\right|_{(A_2,T_0)} = \nabla F(A_1) \cdot v(A_1) \neq 0,$$

puisque le champ est transverse à Σ_1 en A_1. Le théorème des fonctions implicites assure donc l'existence d'une unique solution $t = T(X_2)$ de $G(X_2, t) = 0$ au voisinage de (A_2, T_0). On a donc montré que R est de classe C^1.

Détermination du type de la boucle. Comme R est de classe C^1, et que géométriquement on voit que dans la coordonnée y_2 avec image dans la coordonnée y_1 elle est croissante, elle peut s'écrire

$$R(y_2) = C_2 y_2 + o(y_2),$$

où $C_2 > 0$. On a donc

$$P(y_1) = C_2(C_1 y_1^r) + o(C_1 y_1^r) = C_3 y_1^r + o(y_1^r),$$

où $C_3 > 0$. On considère l'application *déplacement* définie par $D(y_1) = P(y_1) - y_1)$. On a $D(0) = 0$, puisque $y_1 = 0$ correspond à la boucle homoclinique. Regardons sa dérivée :

$$D'(y_1) = C_3 r y_1^{r-1} + o(y_1^{r-1}) - 1 = C_3 r y_1^{r-1}(1 + O(y_1)) - 1.$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe δ_1 tel que, pour $y_1 \in [0, \delta[$, alors $1 + O(y_1) \in]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$. De plus, si $r > 1$ (resp. $r < 1$), il existe $\delta_2 > 0$ tel que $y_1^{r-1} < \epsilon$ (resp. $y_1^{r-1} > \frac{1}{\epsilon}$ pour $y_1 \in]0, \delta_2[$. On prend ϵ assez petit pour que $C_3 r \epsilon (1 + \epsilon) < 1$ (resp. $C_3 r \frac{1-\epsilon}{\epsilon} > 1$). Alors, si $y_1 \in]0, \min(\delta_1, \delta_2)[$ on a $D'(y_1) < 0$, (resp. $D'(y_1) > 0$). Par le théorème des accroissements finis (qui ne requiert pas la différentiabilité en 0 !),

$$D(y_1) - D(0) = D'(y_1^*) y_1 \begin{cases} < 0, & r > 1, \\ > 0, & r < 1, \end{cases}$$

pour $y_1 \in]0, \min(\delta_1, \delta_2)[$. Donc, $P(y_1) < y_1$ (resp. $P(y_1) > y_1$) sur $]0, \min(\delta_1, \delta_2)[$.
□