# Chapitre 1

# La théorie des formes normales de Poincaré

## 1.1 Introduction

Cette méthode est intéressante pour des systèmes suffisamment différentiables (classe $C^m$ avec $m > 1$). Le $m$ sera toujours plus grand que l'ordre des séries de Taylor tronquées quel'on considérera. La problématique est la suivante : étant donné un champ de vecteurs ayant un point singulier en $X_0$, peut-on effectuer un changement de coordonnées ramenant le système au voisinage du point singulier au système linéarisé ? Si oui, on comprend la forme des trajectoires. Bien sûr, ce ne sera pas toujours possible comme le montre le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x - y(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

puisque l'origine de ce système est un foyer asymptotiquement stable, alors que l'origine du système linéarisé est un centre. Comme le système est de classe $C^m$, on peut utiliser son développement de Taylor limité. Dans le cas où la linéarisation du système n'est pas possible, on veut simplifier au maximum les termes non linéaires du développement de Taylor de manière à pouvoir comprendre l'organisation des trajectoires dans le système simplifié. La méthode s'applique à des systèmes à paramètres. On verra qu'elle a des applications très importantes comme la bifurcation de Hopf.

## 1.2 La forme normale de Poincaré

On considère un champ de vecteurs de classe $C^m$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ et ayant un point singulier en $X_0$. En effectuant une translation, on peut supposer $X_0 = 0$. Dans un premier temps, on essaie de se débarrasser de tous les termes non linéaires. La méthode est itérative : on se débarrasse des termes de degré 2, puis de degré 3, etc. On va considérer l'étape générale de se débarrasser des termes de degré $r$ ($r \geq 2$). On suppose donc qu'au voisinage de $X_0$ le champ a la forme

$$\dot{X} = AX + f_r(X) + O(X^{r+1}), \tag{1.1}$$

où $f_r(X)$ est la partie homogène (vectorielle) de degré $r$ ($r < m$). On essaie de se débarrasser des termes de degré $r$. Pour cela, on utilise un changement de variables avec des termes de degré $r$. En général, on donne les nouvelles variables en fonction des anciennes. Ici, on va faire le contraire ! En effet, cela simplifie les calculs. On cherche donc s'il existe $Y = g(X)$ tel que

$$X = g^{-1}(Y) = Y + h_r(Y) \tag{1.2}$$

est un changement de variables vectoriel qui transforme le système en

$$\dot{Y} = AY + O(Y^{r+1}). \tag{1.3}$$

Dans cette expression $h_r(Y)$ est un polynôme homogène (vectoriel) inconnu de degré $r$.

Pour trouver $h_r$, on calcule $\dot{X}$ de deux manières comme fonction de $Y$ et on compare les termes de degré $r$ des deux écritures. La première écriture est obtenue en substituant (1.2) dans (1.1). Alors,

$$\dot{X} = A(Y + h_r(Y)) + f_r(Y + h_r(Y)) + O((Y + h_r(Y))^{r+1}).$$

On se convainc aisément que $f_r(Y + h_r(Y)) = f_r(Y) + O(Y^{r+1})$ et que $O((Y + h_r(Y))^{r+1}) = O(Y^{r+1})$. Donc,

$$\dot{X} = AY + (Ah_r(Y) + f_r(Y)) + O(Y^{r+1}). \tag{1.4}$$

La deuxième écriture est obtenue en dérivant (1.2) par rapport au temps, et en substituant dedans la forme normale cherchée (1.3)

$$\dot{X} = (id + h_r')\dot{Y} = (id + h_r')(AY + O(Y^{r+1})) = AY + h_r'AY + O(Y^{r+1}). \tag{1.5}$$

Ici, $h_r'$ est le jacobien de $h_r$. C'est une matrice $n \times n$ et il est facile de se convaincre que ses entrées sont des polynômes homogènes de degré $r - 1$.

Les équations (1.4) et (1.5) ont les mêmes termes linéaires. En comparant les termes de degré $r$, on obtient :

$$Ah_r(Y) + f_r(Y) = h_r'AY$$

que l'on choisit d'écrire

$$L_A(h_r) = h_r'A - Ah_r = f_r. \tag{1.6}$$

Dans la littérature cette équation est appelée *équation homologique*. Quel est l'avantage de cette expression ? Considérons l'ensemble $H_r$ des fonctions vectorielles homogénes de degré $n$. C'est un espace vectoriel de dimension finie dont les générateurs sont de la forme $Y_1^{m_1} \dots Y_n^{m_n} e_s$, où $e_s$ est le $s$-ième vecteur de la base canonique. L'opérateur $L_A$ défini sur $H_r$ est linéaire et son image est dans $H_r$ : $L_A : H_r \to H_r$. On s'est donc ramené à un problème d'algèbre linéaire ! Quand l'équation $L_A(h_r) = f_r$ a-t-elle toujours une solution, quel que soit $f_r$ ? Quand $L_A$ est surjectif. Mais comme $L_A$ va de $H_r$ à $H_r$, $L_A$ est surjectif si et seulement si injectif, c'est-à dire si et seulement si son noyau est nul, un critère facile à vérifier. Dans le cas où le noyau de $L_A$ est non nul, on ne peut se débarrasser de n'importe quel $f_r$, mais on peut se débarrasser de tout $f_r$ qui se trouve dans l'image de $L_A$ et donc, simplifier le système.

### 1.2.1 Le cas où $A$ est diagonalisable

$A$ est diagonalisable si et seulement si elle admet une base de vecteurs propres. Il existe alors une matrice $S$ inversible telle que $SAS^{-1} = D$ est diagonale. En utilisant le changement de coordonnées $X_1 = SX$, on peut travailler dans la variable $X_1$. On peut donc, sans perte de généralité, supposer que $D$ est diagonale. MAIS, ATTENTION ! Même si $A$ est une matrice à coefficients réels, ses valeurs propres peuvent être complexes et ses vecteurs propres dans $\mathbb{C}^n$. Si l'on regarde la démarche décrite ci-dessus, à aucun moment on n'a utilisé le fait que les coefficients de $A$ sont réels et la démarche s'applique donc aussi bien pour une matrice $A$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. On peut donc calculer une forme normale pour un champ de vecteurs dans $\mathbb{C}^n$, voir que ce changement préserve le « caractère réel » du système, et revenir ensuite dans $\mathbb{R}^n$.

Par la remarque précédente, on peut se ramener au cas d'une matrice $A$ diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0, & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Une base de $H_r$ est donnée par l'ensemble des vecteurs de la forme

$$h = y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n} e_s$$

où $m_1 + \cdots + m_n = r$ et $e_s$ est le $s$-ième vecteur de la base canonique. Calculons $L_A(h)$. Pour un monôme de la forme $y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}$ on utilise souvent la forme abrégée : $Y^m$, où $m = (m_1, \dots m_n)$. Le vecteur $Ah$ est simplement le vecteur $\lambda_s Y^m e_s = \lambda_s h$. Calculons maintenant $h'AY$. Remarquons que

$$\frac{\partial h}{\partial y_i} = m_i y_1^{m_1} \dots y_i^{m_i - 1} \dots y_n^{m_n} = m_i \frac{Y^m}{y_i}.$$

Alors,

$$h'AY = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1\frac{Y^m}{y_1} & m_2\frac{Y^m}{y_2} & \dots & m_n\frac{Y^m}{y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0, & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$h'AY = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n m_i\lambda_i Y^m \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n m_i\lambda_i Y^m e_s = \left(\sum_{i=1}^n m_i\lambda_i\right) h.$$

Donc,

$$L_A(h) = \left(\sum_{i=1}^n m_i\lambda_i - \lambda_s\right) h,$$

c'est-à-dire que $h$ est un vecteur propre de $L_A$ de valeur propre $\sum_{i=1}^n m_i\lambda_i - \lambda_s$. On voit donc que l'équation homologique sur $H_r$ a toujours une solution si et seulement si

$$\lambda_s \neq \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i$$

pour tout $s$ et pour tous $(m_1, \dots, m_n)$ tel que $\sum_{i=1}^n m_i = r$.

Que se passe-t-il si $\lambda_s = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i$ ? Le monôme correspondant, $Y^m = y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}$, est dit *résonant*. Dans le cas où $A$ est diagonale, on peut se débarrasser de tous les monômes non résonants et on reste avec un système qui n'a que des monômes résonants. Ce système a souvent une forme simple, sur laquelle on peut lire et comprendre la géométrie des trajectoires. Regardons maintenant des exemples.

EXEMPLE 1 *Cas d'un système dans $\mathbb{R}^2$ avec deux valeurs propres imaginaires pures, $\pm i\omega$. Pour le système réel, il est possible, modulo un changement linéaire de coordonnées de supposer que la matrice a la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$. Il est naturel de passer aux coordonnées complexes $z = x + iy$ et $\overline{z} = x - iy$. Dans ces coordonnées, la matrice est diagonale : $D = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = i\omega$ et $\lambda_2 = -i\omega$. Regardons les elations de résonance pour la première équation. On doit résoudre : $\lambda_1 = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$, soit $m_1 = m_2 + 1$, où $m_1, m_2 \geq 0$ et $m_1 + m_2 \geq 2$. Ceci nous donne les monômes résonants $z^2\overline{z}$, $z^3\overline{z}^2$, ..., $z^{k+1}\overline{z}^k$, ..., qui sont tous de degré* *impair. Donc, dans la première équation, on peut se ramener, modulo un changement de coordonnées* $z \mapsto Z$*, à une équation de la forme*

$$\dot{Z} = i\omega Z + c_1 Z^2\overline{Z} + c_2 Z^3\overline{Z}^2 + \cdots + c_k Z^{k+1}\overline{Z}^k + O(|Z|^{2k+2}).$$

*On peut faire le même calcul pour la deuxième équation et voir que les monômes résonants sont de la forme* $z^k\overline{z}^{k+1}$*. Mais, on peut aussi être astucieux : puisque le système est réel, la deuxième équation est la conjuguée de la première :*

$$\dot{\overline{Z}} = -i\omega\overline{Z} + \overline{c}_1 Z\overline{Z}^2 + \overline{c}_2 Z^2\overline{Z}^3 + \cdots + \overline{c}_k Z^k\overline{Z}^{k+1} + O(|Z|^{2k+2}).$$

*Revenons aux coordonnées réelles* $(x, y) = \left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right)$*. En posant* $c_j = a_j + ib_j$*, le système devient*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y + (a_1x - b_1y)(x^2+y^2) + \cdots + (a_kx - b_ky)(x^2+y^2)^k + O(|(x,y)|^{2k+2}),\\ \dot{y} &= \omega x + (b_1x + a_1y)(x^2+y^2) + \cdots + (b_kx + a_ky)(x^2+y^2)^k + O(|(x,y)|^{2k+2}). \end{aligned} \tag{1.7}$$

*La géométrie se lit tout de suite si on passe aux coordonnées polaires*

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

*dans lesquelles le système devient*

$$\begin{aligned} \dot{r} &= a_1r^3 + \ldots a_kr^{2k+1} + O(r^{2k+2}),\\ \dot{\theta} &= \omega + b_1r^2 + \ldots b_kr^{2k} + O(r^{2k+1}). \end{aligned} \tag{1.8}$$

*On voit tout de suite que* $\dot{\theta} > 0$ *pour* $r$ *assez petit. D'autre part, supposons que* $a_1, \ldots a_{k-1} = 0$ *et* $a_k \neq 0$*. Alors, au voisinage de l'origine* $\dot{r}$ *a le signe de* $a_k$*. Si* $a_k$ *est négatif (resp. positif), le point singulier est un* foyer faible attractif (resp. répulsif)*.*

*L'effet de la mise sous forme normale est de redresser les trajectoires pour transformer le système en en un système à peu près invariant sous toute rotation autour de l'origine.*

Dans le cas de l'exemple 1, on a triché un peu, puisqu'on s'est permis de mettre sous forme normale des termes d'ordre supérieur, même s'il restait des termes non linéaires de degré plus petit. Nous laissons comme exercice le soin de vérifier que cette approche est légitime.

**Exercice** Vérifier que, lors de la mise sous forme normale des termes de degré $r$, on ne détruit pas le travail accompli sur les termes de degré $s < r$.

EXEMPLE 2 *Cas de deux valeurs propres* $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda \neq 0$*. (Dans la littérature un point ayant au maximum une valeur propre nulle est appelé* semi-hyperbolique*). On peut donc, modulo un changement de coordonnées suposer la partie linéaire diagonale*

$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$. *On va utiliser* $x$ *et* $y$ *pour les coordonnées, plutôt que* $x_1$ *et* $x_2$. *Dans la première équation les termes résonants sont de la forme* $x^m$, $m \geq 2$, *et dans la deuxième de la forme* $x^s y$, $s \geq 1$. *Donc, la forme normale est donnée par*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=p}^{r} a_i x^i + O(|(x,y)|^{r+1}), \\ \dot{y} &= y(\lambda + \sum_{i=1}^{r-1} b_i x^i) + O(|(x,y)|^{r+1}). \end{aligned} \tag{1.9}$$

*Supposons maintenant que* $a_p \neq 0$. *Sous cette forme, on peut voir l'organisation des trajectoires. On a trois organisations topologiques possibles :*

- *un col-noeud si* $p$ *est pair ;*
- *un col topologique si* $p$ *est impair et* $a_p\lambda < 0$ *;*
- *un nœud topologique si* $p$ *est impair et* $a_p\lambda > 0$.

### 1.2.2 Forme normale avec paramètres

On peut toujours transformer une famille de systèmes $\dot{X} = \nu_\epsilon(X)$ en dimension $n$ dépendant d'un multi-paramètre $\epsilon = (\epsilon_1, \dots \epsilon_p)$ en un système de dimension $p + n$ en ajoutant les équations $\dot{\epsilon}_1 = 0, \dots, \dot{\epsilon}_p = 0$. On considère la forme normale de la famille de systèmes au voisinage d'une valeur particulière du multi-paramètre que, sans perte, de géneralité, on peut supposer être $\epsilon = 0$. On considère donc des changements de coordonnées inversibles pour $\epsilon$ assez petit. Bien sûr, les équations $\dot{\epsilon}_1 = 0, \dots, \dot{\epsilon}_p = 0$ sont déjà linéaires et il suffit d'appliquer la théorie précédente aux $n$ premières équations. Les termes non résonants dans le système pour $\epsilon = 0$ le demeurent pour $\epsilon$ petit. Quant aux monômes résonants de la forme $x_1^{m_1} \dots, x_n^{m_n}$, tous leurs multiples de la forme $x_1^{m_1} \dots, x_n^{m_n} \epsilon_1^{s_1} \dots \epsilon_p^{s^p}$ le sont aussi. Donc, en pratique, ces monômes auront des coefficients dépendant de $\epsilon$.

EXEMPLE 3 *Considérons un système de classe* $C^m$ *dépendant d'un multi-paramètre* $\epsilon = (\epsilon_1, \dots \epsilon_p)$ *qui, pour* $\epsilon = 0$, *a un point singulier à l'origine de valeurs propres* $\pm i\omega_0$, *où* $\omega_0 > 0$. *En coordonnées complexes* $z = x + iy$, *on peut supposer que la matrice du linéarisé en 0,* $A$, *est diagonale pour* $\epsilon = 0$. *Considérons l'équation* $\nu_\epsilon(X) = 0$. *On a* $\nu_0(0) = 0$ *et* $\frac{\partial \nu}{\partial X}\big|_{(X,\epsilon)=(0,0)} = A$ *est inversible. Par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage* $V$ *de* $X = 0$, *un voisinage* $W$ *de* $\epsilon = 0$ *et une fonction* $f : W \to V$ *de classe* $C^m$, *tels que* $\nu_\epsilon(X) = 0$ *pour* $(X, \epsilon) \in V \times W$ *si et seulement si* $X = f(\epsilon)$. *Donc, pour tout* $\epsilon$, *le système a un unique point singulier qui est une fonction de classe* $C^m$ *des paramètres. Par une translation de coordonnées* $X \mapsto X_1 = X - f(\epsilon)$, *la nouvelle famille de systèmes a un point singulier à l'origine. Regardons maintenant le linéarisé* $A(\epsilon)$. *Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractérisque* $\det(\lambda I - A) = 0 = p(\lambda, \epsilon)$. *On a* $p(\pm i\omega_0, 0)$ *et* $\frac{\partial p}{\partial \lambda}(\pm i\omega_0, 0) \neq 0$ *car les racines sont simples. On en déduit par le théorème des fonctions implicites que les valeurs propres dépendent de manière* $C^m$ *de* $\epsilon$. *En particulier, elles sont non nulles* *pour $\epsilon$ petit puisqu'égales à $\pm i\omega_0$ pour $\epsilon = 0$. Donc, $A(\epsilon)$ est diagonalisable pour $\epsilon$ petit, de valeurs propres $\eta(\epsilon) \pm i\omega(\epsilon)$ où $\eta(0) = 0$ et $\omega(0) = \omega_0 \neq 0$. Par un changement linéaire de coordonnées on peut donc ramener le système sous la forme (en coordonnées complexes) :*

$$\dot{z} = (\eta(\epsilon) + i\omega(\epsilon))z + \sum_{j+k=2}^{r} a_{jk} z^j \overline{z}^k + O(|z|^{r+1}).$$

*On peut ensuite appliquer le processus de mise sous forme normale et ne garder que les termes résonants de la forme $z^{j+1}\overline{z}^j$. Le système aura la forme*

$$\dot{z} = (\eta(\epsilon) + i\omega(\epsilon))z + \sum_{j=1}^{k} c_j(\epsilon) z^{j+1} \overline{z}^j + O(|z|^{2k+2}).$$

*L'avantage de cette forme est qu'elle permet d'étudier la naissance de cycles limites lorsque les valeurs propres traversent l'axe imaginaire. C'est le phénomène de la* bifurcation de Hopf *que nous discuterons plus tard.*

EXEMPLE 4 *La forme normale d'une famille de systèmes ayant pour $\epsilon = 0$ un point semi-hyperbolique est donnée par*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sum_{i=0}^{r} a_i(\epsilon) x^i + O(|(x,y)|^{r+1}),\\ \dot{y} &= y(\lambda(\epsilon) + \sum_{i=1}^{r-1} b_i(\epsilon) x^i) + O(|(x,y)|^{r+1}).\end{aligned} \tag{1.10}$$

*Si $a_0(0) = \cdots = a_{p-1}(0) = 0$ et $a_p(0) \neq 0$, on peut, par une translation de la coordonnée $x$ se ramener au cas $a_{p-1} = 0$. Voyons un exemple*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\epsilon + x^2,\\ \dot{y} &= y.\end{aligned} \tag{1.11}$$

*On a trois portraits de phase différents suivant que $\epsilon < 0$, $\epsilon = 0$ et $\epsilon > 0$. En $\epsilon > 0$, on a deux points singuliers : un col et un nœud. Ceux-ci se confondent pour $\epsilon = 0$ en un col-nœud, et ont disparu pour $\epsilon = 0$. Comme nous l'avons vu dans l'exemple 3, le théorème des fonctions implicites garantit que les points singuliers ne peuvent disparaître lorsque les valeurs propres sont non nulles. Le nombre de points singuliers d'un système peut varier seulement quand au moins une des valeurs propres est nulle.*

### 1.2.3 Le cas où $A$ n'est pas diagonalisable

Dans ce cas, il n'existe pas de méthode générale pour écrire le résultat et chaque cas particulier doit être étudié à la main.

Nous allons montrer une manière de procéder pour le cas d'un point singulier d'un système de dimension 2 dont la matrice du linéarisé est nilpotente.

EXEMPLE 5 **Le cas d'un point singulier de matrice du linéarisé nilpotente :** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$**.** *Nous allons étudier quels sont les termes de degré 2 dont on peut se débarrasser lors de la mise sous forme normale et quels sont ceux que l'on doit garder. Une base de* $H_2$ *est donnée par*

$$\left\{h_1 = \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, h_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, h_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, h_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix}\right\}.$$

*On doit donc calculer les* $L_A(h_i)$, $i = 1, \dots, 6$, *et regarder quel est le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs.*

$$\begin{aligned} L_A(h_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= h_1' A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A h_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2h_2. \end{aligned} \tag{1.12}$$

*De même,*

$$\begin{aligned} L_A(h_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} = h_3, \\ L_A(h_3)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \\ L_A(h_4)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = -h_1 + 2h_5, \\ L_A(h_5)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy \\ y^2 \end{pmatrix} = h_6 - h_2, \\ L_A(h_6)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2 \\ 0 \end{pmatrix} = -h_3. \end{aligned} \tag{1.13}$$

*Donc,* $L_A(H_2)$ *est de dimension* 4*. Il est engendré par* $\{h_2, h_3, h_1 - 2h_5, h_6\}$*. Puisque nous pouvons nous débarrasser de tous les termes dans l'image de* $L_A$*, on reste avec des termes non linéaires dans un complément de dimension 2. On a un choix pour ce complément. Par exemple, il peut être engendré par* $\{h_1, h_4\}$ *ou* $\{h_4, h_5\}$*. Donc, un système non linéaire peut, au voisinage d'un point singulier nilpotent se ramener, au choix, à une des deux formes*

$$\dot{x} = y + bx^2, \tag{1.14}$$
$$\dot{y} = ax^2, \tag{1.15}$$

*ou*

$$\dot{x} = y, \tag{1.16}$$
$$\dot{y} = ax^2 + cxy. \tag{1.17}$$

*Déjà ces formes normales nous apprennent quelque chose : si* $a \neq 0$*, on connaît l'organisation des trajectoires au voisinages du point singulier qui, dans la littérature, est* *appelé un* cusp. *Si, de plus,* $b \neq 0$ *ou, de manière équivalente,* $c \neq 0$*, en plongeant le système dans une famille à deux paramètres de systèmes, on peut décrire tous les portraits de phase de systèmes « voisins » de celui-ci. C'est la* bifurcation de Bogdanov-Takens.