

Chapitre 1

Généralités

1.1 Introduction

1.1.1 Les équations différentielles ordinaires

Les équations différentielles ordinaires (aussi appelées systèmes d'équations différentielles ordinaires) sont, au départ des équations de la forme

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X} = v(X, t),$$

où $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction différentiable sur un ouvert U de \mathbb{R}^{n+1} . La classe de différentiabilité de v dépend du contexte mais, dans le cours, v sera toujours au moins de classe C^1 .

Le cas autonome est celui où v est indépendante de t :

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X} = v(X).$$

La fonction v est alors un champ de vecteurs défini sur un ouvert de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^n . Plus généralement, on pourra remplacer U par une variété différentiable de dimension n , c'est-à-dire un objet qui localement ressemble à \mathbb{R}^n , et sur lequel la notion de champ de vecteurs de classe C^1 a un sens.

Le cas non autonome peut sembler plus général que le cas autonome. Ce n'est pas vraiment le cas. En effet, considérons une équation différentielle ordinaire non autonome $\dot{X} = v(X, t)$. Si on pose $w(X, t) = (v(X, t), 1)$, alors l'équation différentielle ordinaire non autonome est équivalente à l'équation différentielle autonome

$$\begin{aligned} \dot{X} &= v(X, t), \\ \dot{t} &= 1, \end{aligned} \tag{1.1}$$

ou encore

$$\dot{Y} = w(Y),$$

pour $Y = (X, t)$ sur un ouvert de \mathbb{R}^{n+1} . Donc, le cas non autonome en dimension n est un cas particulier du cas autonome en dimension $n + 1$.

On retrouve les équations différentielles ordinaires dans de très nombreux domaines d'application. Au départ, ce fut la mécanique classique, mais elles sont aussi utilisées en biologie mathématique, pour modéliser des systèmes électriques, dans l'étude des équations aux dérivées partielles, etc. Leur étude fait partie d'un grand chapitre des mathématiques appelé *les systèmes dynamiques*.

1.1.2 Le point de vue de Poincaré

Jusqu'aux travaux de Poincaré à la fin du 19-ième siècle, les mathématiciens essayaient d'« intégrer » des équations différentielles ordinaires. Étant donné une équation différentielle ordinaire (1.1), intégrer cette équation, c'est donner, pour tout (X_0, t_0) « admissible » une solution sous la forme d'une fonction $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, où W un voisinage de t_0 dans \mathbb{R} , telle que

$$\frac{df}{dt}(t) = v(f(t), t),$$

et $f(t_0) = X_0$. Poincaré a montré que l'intégration par des fonctions connues est impossible en général. Il a par contre introduit des méthodes géométriques pour étudier le comportement des solutions.

Prenons le point de vue autonome. Dans ce point de vue, le théorème d'existence et d'unicité des solutions garantit que, par tout point de U , il passe une trajectoire et une seule. Ceci donne une partition de U comme réunion de trajectoires disjointes. Cette partition de U s'appelle le *portrait de phase* de l'équation différentielle ordinaire. Connaître le portrait de phase d'une équation différentielle ordinaire permet de connaître qualitativement le comportement à long terme des trajectoires et, en particulier, quand le temps tend vers l'infini. Voici quelques comportements possibles :

- une trajectoire part à l'infini, par exemple pour les modèles de croissance de population en laboratoire : $\dot{x} = ax$ pour $a > 0$;
- une trajectoire se stabilise à une position d'équilibre, par exemple un pendule amorti ;
- une trajectoire s'approche d'une solution périodique appelée cycle limite, par exemple lorsque votre cœur reprend son rythme normal après un effort ;
- on verra qu'il existe des comportements « chaotiques » qui restent cependant bornés. C'est le cas de la trajectoire de Pluton.

Donner le portrait de phases d'une équation différentielle ordinaire est un problème très difficile. Il n'existe pas de méthode générale, seulement des méthodes ad hoc qu'on essaie d'agencer au mieux en fonction des particularités du système étudié. La première étape est la théorie locale : on étudie la répartition des trajectoires au voisinage d'un point X_0 de U . Cette étude est assez systématique. C'est le recollement des portraits de phase locaux en un portrait de phases global qui l'est moins. Les équations différentielles ordinaires

issues d'un processus de modélisation dépendent souvent de paramètres. Il est donc naturel d'étudier des équations différentielles ordinaires dépendant de paramètres, et pour chaque valeur des paramètres, de donner le portrait de phase. On rencontrera des valeurs des paramètres pour lesquelles le portrait de phase subira un changement qualitatif. Une telle valeur des paramètres est appelée *valeur de bifurcation* et on dit que le système subit une *bifurcation*. Lorsque la bifurcation concerne le comportement des trajectoires au voisinage d'un point singulier, il existe des méthodes analytiques permettant de l'étudier en détail, au moins lorsque la dimension, n , n'est pas trop grande et que la singularité n , est pas trop complexe (« petite codimension »). L'analyse de la bifurcation nous donne donc une « prise » pour étudier le système.

La stratégie d'études des systèmes dynamiques consiste à exploiter au maximum les quelques prises qu'on a sur le système et à tenter d'en déduire les portraits de phase. Les principales prises sont l'étude des singularités, l'étude des bifurcations des singularités (cela nous permettra par exemple de conclure à la présence de cycles limites), et quelques théorèmes globaux comme le théorème de Poincaré-Bendixson.

1.1.3 La théorie des systèmes dynamiques

La théorie des systèmes dynamiques étudie l'évolution des systèmes dans le temps. Lorsque le temps est continu, on a les équations différentielles ordinaires. Lorsque le temps est discret, ce sont les équations aux différences. Une équation aux différences est une équation de la forme

$$X_{n+1} = F(X_n, n),$$

où $X \in \mathbb{R}^n$ et $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, pour U un ouvert de \mathbb{R}^{n+1} . Elle est autonome si F ne dépend que de X et est indépendante de n .

La dualité « systèmes discrets — systèmes continus » jouera un rôle important dans l'étude des systèmes dynamiques. Par exemple, lorsqu'on voudra étudier le voisinage d'une solution périodique, on prendra une section transversale Σ à la solution périodique et on introduira une fonction $P : \Sigma' \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$, appelée application de premier retour de Poincaré. Une solution périodique correspondra à un point fixe de P . Étudier la stabilité de la solution périodique revient à étudier la stabilité du point fixe correspondant de P .

Un autre contexte naturel d'étude des équations différentielles ordinaires où on introduit une application est celui d'une équation non autonome $\dot{x} = v(x, t)$, où v est périodique en t de période T . Étant donné un temps initial t_0 , soit $\Phi(t, X_0)$ la solution du système telle que $\Phi(t_0, X_0) = X_0$. On introduira la

fonction $F(X_0) = \Phi(t_0 + T, X_0)$ et ses itérées

$$\begin{aligned} F^2 &:= F \circ F, \\ \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \\ F^n &:= \underbrace{F \circ \dots \circ F}_n, \\ \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Étudier F et ses itérées revient à avoir une vue stroboscopique du système.

Parmi les différentes approches de l'étude des équations aux dérivées partielles, il existe une approche « systèmes dynamiques » qui consiste à considérer une équation aux dérivées partielles comme un système dynamique de dimension finie. Dans certains cas des méthodes de réduction permettent de se ramener à l'étude de systèmes en dimension finie.

1.1.4 Les systèmes hamiltoniens

Regardons le problème des n corps. C'est le problème de n points matériels soumis à la loi de la gravitation universelle de Newton. Si \vec{X}_i dénote la position du i -ième point matériel dans \mathbb{R}^3 , ceci nous donne les équations de Newton :

$$m_i \ddot{\vec{X}}_i = K \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{\vec{X}_j - \vec{X}_i}{|\vec{X}_j - \vec{X}_i|^3}. \quad (1.2)$$

En changeant d'unité, on peut toujours supposer $K = 1$. Posons $m_i \dot{\vec{X}}_i = \vec{p}_i$. Alors, l'équation de Newton devient équivalente au système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{aligned} \dot{\vec{X}}_i &= \frac{1}{m_i} \vec{p}_i, \\ \dot{\vec{p}}_i &= \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{\vec{X}_j - \vec{X}_i}{|\vec{X}_j - \vec{X}_i|^3}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ce système a une forme très particulière. En effet, l'énergie cinétique est donnée par

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \langle \dot{\vec{X}}_i, \dot{\vec{X}}_i \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \langle \vec{p}_i, \vec{p}_i \rangle$$

et l'énergie potentielle par

$$V = - \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\vec{X}_j - \vec{X}_i|}.$$

Soit $H = K + V$ l'énergie totale : c'est une fonction des vecteurs \vec{X}_i et \vec{p}_i . Remarquons que

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} = \frac{1}{m_i} \vec{p}_i.$$

(Ici $\frac{\partial H}{\partial \vec{X}_i}$ représente un gradient.) Aussi,

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{X}_i} = - \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{\vec{X}_j - \vec{X}_i}{|\vec{X}_j - \vec{X}_i|^3}.$$

Donc, le système a la forme

$$\begin{cases} \dot{\vec{X}}_i = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i}, \\ \dot{\vec{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \vec{X}_i}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

On pose $\vec{X} = (\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ et $\vec{p} = (\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$. Le système a la forme simple

$$\begin{aligned} \dot{\vec{X}} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}, \\ \dot{\vec{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{X}}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

sur \mathbb{R}^{2N} (ici $N = 3n$). Un tel système est appelé *système hamiltonien*. Une partie très importante de la mécanique classique se ramène à l'étude des systèmes hamiltoniens. Ceux-ci sont des systèmes d'équations différentielles ordinaires. La mécanique classique est donc une justification significative de l'importance des systèmes d'équations différentiels non linéaires. De part sa forme, un système hamiltonien est toujours défini sur un espace de dimension paire égale à $2N$. N est appelé le *nombre de degrés de liberté du système*.

1.2 Quelques rappels

1.2.1 Théorèmes des fonctions inverses et implicites

Ce sont deux grands théorèmes de l'analyse. On les utilisera à tour de bras.

THÉORÈME 1 (*Théorème des fonctions inverses*) Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^r , $r \geq 1$, (resp. C^∞ , C^ω ou analytique). Soit $X_0 \in U$. Si $\text{Jac}(F)(X_0) = DF(X_0) = A$ est inversible, alors il existe un voisinage ouvert V de X_0 dans U et un voisinage ouvert W de $F(X_0)$ dans \mathbb{R}^n tels que $F|_V : V \rightarrow W$ est bijective. De plus, $F^{-1} : W \rightarrow V$ est aussi de classe C^r (resp. C^∞ , C^ω) et $\text{Jac}(F^{-1})(F(X_0)) = A^{-1} = (\text{Jac}(F)(X_0))^{-1} = (DF(X_0))^{-1}$.

THÉORÈME 2 (*Théorème des fonctions implicites*) Soit U un ouvert de \mathbb{R}^{n+m} et $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^r , $r \geq 1$, (resp. C^∞ , C^ω ou analytique). On note (X, Y) les coordonnées sur U , où $X \in \mathbb{R}^m$ et $Y \in \mathbb{R}^n$. Soit $(X_0, Y_0) \in U$ tel que $F(X_0, Y_0) = 0$. Si $\text{Jac}_Y(F(X_0, \cdot))(Y_0) = D_Y F(X_0, Y_0)$ est inversible, alors il existe

- un voisinage ouvert V de (X_0, Y_0) dans U ,
- un voisinage ouvert W de X_0 dans \mathbb{R}^m ,
- et une fonction $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ dont le graphe est inclus dans V ,

telles que, si $(X, Y) \in V$, alors $F(X, Y) = 0$ si et seulement si $Y = f(X)$. De plus f est de classe C^r (resp. C^∞ , C^ω).

1.2.2 Systèmes de coordonnées

DÉFINITION 1 Un système de coordonnées de classe C^r (resp. C^∞ , C^ω ou analytique, linéaire) sur un ouvert U de \mathbb{R}^n est formé de n familles d'hypersurfaces $\{\gamma_{\alpha_i}^i\}$ de classe C^r (resp. C^∞ , C^ω , linéaire), $i = 1, \dots, n$ telles que

- pour tout i , $U = \cup_{\alpha_i} \gamma_{\alpha_i}^i$;
- pour tout $X \in U$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ uniques tels que $X = \cap \gamma_{\alpha_i}^i$;
- les hypersurfaces $\gamma_{\alpha_i}^i$ sont de la forme $F_i(X) = C_i(\alpha_i)$ où F_i est de classe C^r (resp. C^∞ , C^ω ou analytique, linéaire);
- la fonction $F = (F_1, \dots, F_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est inversible. Ceci implique que, pour tout $X_0 \in U$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $X_0 = \cap \gamma_{\alpha_i}^i$, alors les hypersurfaces $\gamma_{\alpha_i}^i$ sont transversales en X_0 , c'est-à-dire que les vecteurs $\nabla F_{\alpha_1}(X_0), \dots, \nabla F_{\alpha_n}(X_0)$ sont linéairement indépendants.

Le choix de la classe (C^r , C^∞ , C^ω , linéaire) dépend du contexte. Lorsqu'on considère un système d'équation différentielle de classe C^{r+1} (resp. C^∞ , C^ω , linéaire), on permet en général des changements de coordonnées dans la même classe pour garder cette caractéristique du système.

On veut comprendre l'organisation géométrique des trajectoires d'un système d'équations différentielles ordinaires. On utilisera régulièrement des changements de coordonnées pour simplifier la forme des équations et rendre ainsi la géométrie plus transparente.

1.2.3 Théorème de point fixe de Banach

THÉORÈME 3 (*Théorème de point fixe de Banach*) Soit \mathcal{X} un espace métrique complet et $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ une contraction (c'est-à-dire qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que pour tous $x, y \in \mathcal{X}$ on ait $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$). Alors, f a un unique point fixe.

PREUVE Commençons par l'unicité : si x et y sont deux points fixes, alors $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$ et, d'autre part, puisque $f(x) = x$ et $f(y) = y$, on a $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. La seule possibilité est $d(x, y) = 0$, c'est-à-dire $x = y$.

Passons maintenant à l'existence. Soit $x_0 \in \mathcal{X}$. On définit par récurrence la suite x_n en posant $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrons que la suite est de Cauchy. Soit

$\epsilon > 0$. On cherche N tels que si $m, n > N$, alors $d(x_m, x_n) < \epsilon$. On a

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq cd(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq c^n d(x_1, x_0).$$

Alors, pour $m > n$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq d(x_1, x_0)(c^{m-1} + \dots + c^n) \\ &\leq d(x_1, x_0) \frac{c^n}{1-c}. \end{aligned}$$

On voit bien que $d(x_1, x_0) \frac{c^n}{1-c} < \epsilon$ pour N assez grand.

Comme l'espace métrique \mathcal{X} est complet, la suite $\{x_n\}$ converge vers un point $a \in \mathcal{X}$. Donc, $\lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = \lim x_n = a$. De plus, puisque f est une contraction, alors f est uniformément continue (exercice). Alors, $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$. Donc, $f(a) = a$. \square

1.3 Les théorèmes d'existence et d'unicité des systèmes d'équations différentielles ordinaires

Suite à la remarque qu'une équation différentielle ordinaire non autonome en dimension n peut se ramener à une équation différentielle autonome en dimension $n + 1$, on ne discutera que le cas autonome.

Notation On note par $B(X, r)$ la boule centrée en X de rayon r et $\overline{B}(X, r)$ sa fermeture.

THÉORÈME 4 On considère un champ de vecteurs $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r et $X_0 \in U$. Il existe $\delta > 0$, $\epsilon > 0$ et une fonction $\Phi(X, t)$ de classe C^r définie sur $\{X \in U; |X - X_0| < \delta\} \times \{t \in]-\epsilon, \epsilon[\}$ tels que pour tout $X_1 \in B(X_0, \delta)$, la fonction $\Phi(X_1, \cdot) :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow U$ est solution de l'équation différentielle ordinaire $\dot{X} = v(X)$ sous la condition initiale $\Phi(X_1, 0) = X_1$. La solution est unique au sens suivant : si on a deux solutions de l'équation différentielle ordinaire $\dot{X} = v(X)$ sous la même condition initiale, alors elles coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition.

PREUVE On va trouver Φ comme point fixe d'un opérateur. En effet, supposons que $\Phi(X_1, t)$ soit solution de l'équation intégrale

$$\Phi(X_1, t) = X_1 + \int_0^t v(\Phi(X_1, s)) ds. \quad (1.6)$$

En dérivant, on voit tout de suite que $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(X_1, t) = v(\Phi(X_1, t))$ et que $\Phi(X_1, 0) = X_1$. Donc, la fonction $t \mapsto \Phi(X_1, t)$ est la solution cherchée.

On considère l'opérateur $\Phi \mapsto T(\Phi)$ où

$$T(\Phi)(X_1, t) = X_1 + \int_0^t v(\Phi(X_1, s)) ds. \quad (1.7)$$

Pour pouvoir montrer que T a un point fixe, il faut montrer que T est défini sur un espace de fonctions \mathcal{X} , qui est un espace métrique complet, que l'image de T est aussi dans \mathcal{X} et que T est une contraction.

On prend δ suffisamment petit pour que la fermeture de la boule de rayon 2δ centrée en X_0 , soit incluse dans U . Soit

$$M = \max_{X \in \overline{B}(X_0, 2\delta)} |v(X)|,$$

et soit

$$K = \max_{X \in \overline{B}(X_0, 2\delta)} \|Dv(X)\|.$$

On définit

$$\mathcal{X} = \{\Phi : \overline{B}(X_0, \delta) \times [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \overline{B}(X_0, 2\delta) \mid \Phi \text{ continue, } \Phi(X_1, 0) = X_1\}.$$

Sur \mathcal{X} on définit la norme

$$\|\Phi\| = \max_{(X_1, t) \in \overline{B}(X_0, \delta) \times [-\epsilon, \epsilon]} |\Phi(X_1, t)|.$$

Montrons qu'on peut choisir ϵ pour que $T(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$. Il est facile de voir que $T(\Phi)$ est continue si Φ est continue et que $T(\Phi)(X, 0) = X$. Aussi,

$$\begin{aligned} |T(\Phi)(X_1, t) - X_0| &\leq |T(\Phi)(X_1, t) - X_1| + |X_1 - X_0| \\ &\leq \int_0^t |v(\Phi(X_1, s))| ds + \delta \\ &\leq \int_0^t M dt + \delta \\ &\leq M\epsilon + \delta \leq 2\delta, \end{aligned} \tag{1.8}$$

si on choisit ϵ pour que $M\epsilon < \delta$.

Il faut maintenant voir qu'on peut choisir ϵ pour que T soit une contraction. Soient $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{X}$. On a pour tout $X \in \overline{B}(X_0, \delta)$ et pour tout $t \in [-\epsilon, \epsilon]$

$$\begin{aligned} |T(\Phi_1)(X_1, t) - T(\Phi_2)(X_1, t)| &= \left| \int_0^t (v(\Phi_1(X_1, s)) - v(\Phi_2(X_1, s))) ds \right| \\ &\leq \int_0^t |v(\Phi_1(X_1, s)) - v(\Phi_2(X_1, s))| ds \\ &\leq \int_0^t K |\Phi_1(X_1, s) - \Phi_2(X_1, s)| ds \\ &\leq \epsilon K \|\Phi_1 - \Phi_2\|. \end{aligned} \tag{1.9}$$

On obtient donc une contraction si on prend ϵ assez petit pour que $K\epsilon < 1$.

On ne montrera pas ici que \mathcal{X} est un espace métrique complet, mais c'est standard. On peut donc appliquer le théorème de point fixe de Banach et conclure que T a un unique point fixe dans \mathcal{X} . Nous venons donc de démontrer l'unicité de la solution de l'équation différentielle. Ce point fixe est une fonction $\Phi(X_1, t)$, continue, qui satisfait l'équation intégrale (1.6). Comme le membre de droite est continûment dérivable en t , on en conclut que $\Phi(X_1, t)$ est continûment dérivable en t .

Montrer que $\Phi(X_1, t)$ est continûment dérivable en X_1 requiert plus de travail. Il faut trouver un candidat pour $\frac{\partial \Phi}{\partial X_1}$. Voici comment on le trouve. Supposons que Φ est de classe C^1 . On a alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_1} \right) = \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial X_1} v(\Phi(X_1, t)) = Dv(\Phi(X_1, t)) \frac{\partial \Phi}{\partial X_1}. \quad (1.10)$$

On vient de montrer que $\frac{\partial \Phi}{\partial X_1}$ est solution d'une équation différentielle linéaire (mais pas à matrice constante) appelée *équation aux variations*. Puisque $\Phi(X_1, 0) = X_1$, ceci nous donne $\frac{\partial \Phi}{\partial X_1}(X_1, 0) = I_n$, soit la matrice identité $n \times n$. Appelons $A(X_1, t)$ la matrice $A(X_1, t) = Dv(\Phi(X_1, t))$, et soit $\Psi(X_1, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} \in \mathbb{R}^{n^2}$. On a le système $\dot{\Psi} = A(X_1, t)\Psi$. C'est un système du style précédemment étudié et sa solution peut être construite comme solution de l'équation intégrale

$$\Psi(X_1, t) = I_n + \int_0^t A(X_1, s)\Psi(X_1, s)ds,$$

c'est-à-dire comme point fixe de l'opérateur

$$S(\Psi)(X_1, t) = I_n + \int_0^t Dv(\Phi(X_1, s))\Psi(X_1, s)ds.$$

Cette solution va exister si ϵ est assez petit. On veut maintenant voir que cette solution est bien $\frac{\partial \Phi}{\partial X_1}$.

Pour cela, on va regarder comment sont obtenues les solutions des deux équations intégrales définissant Φ et Ψ : ce sont les limites des suites Φ_m et Ψ_m définies par

$$\begin{cases} \Phi_0(X_1, t) = X_1, \\ \Psi_0(X_1, t) = I_n, \\ \Phi_{m+1}(X_1, t) = T(\Phi_m)(X_1, t), \\ \Psi_{m+1}(X_1, t) = S_m(\Psi_m)(X_1, t), \end{cases}$$

où

$$S_m(\Psi)(X_1, t) = I_n + \int_0^t Dv(\Phi_m(X_1, s))\Psi(X_1, s)ds.$$

On peut vérifier qu'à chaque étape on a $\Psi_m = \frac{\partial \Phi_m}{\partial X_1}$. Ceci se montre par induction. C'est évident pour $m = 0$. Supposons que ce soit vrai pour m . Alors,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial X_1}(X_1, t) &= \frac{\partial}{\partial X_1} \left(X_1 + \int_0^t \Phi_m(X_1, s) ds \right) \\ &= I_n + \int_0^t Dv(\Phi_m(X_1, s)) \frac{\partial \Phi_m}{\partial X_1}(X_1, s) ds \\ &= I_n + \int_0^t Dv(\Phi_m(X_1, s)) \Psi_m(X_1, s) ds \\ &= \Psi_{m+1}(X_1, t). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Il faut montrer que la suite Ψ_m converge vers Ψ (exercice). Alors, puisque la suite des dérivées $\frac{\partial \Phi_m}{\partial X_1}$ des Φ_m converge vers une fonction Ψ , et puisque Φ_m converge vers Φ , nécessairement $\Psi = \frac{\partial \Phi}{\partial X_1}$.

Montrons maintenant que $\Phi(X_1, t)$ est de classe C^r . Commençons par la différentiabilité en t . Pour cela, on regarde l'équation (1.7). Comme $\Phi(X_1, t)$ est de classe C^1 , si v est de classe C^1 , le côté droit est 2 fois différentiable en t . Donc, il en est de même du côté gauche. Par suite, si v est de classe C^3 , le côté droit est 3 fois différentiable en t . Donc, il en est de même du côté gauche. Etc.

Pour la différentiabilité en X_1 on joue le même jeu, mais en regardant simultanément les équations (1.7) et (1.10). On a montré que Ψ est de classe C^1 en X_1 , donc Φ est de classe C^2 en X_1 . En appliquant le théorème en classe C^2 à l'équation aux variations, on obtient que Ψ est de classe C^2 en X_1 , donc Φ est de classe C^3 en X_1 . Etc.

Dans le cas analytique, il est plus simple d'utiliser des méthodes analytiques directes que d'essayer de montrer la convergence de la série de Taylor qu'on pourrait obtenir par la méthode précédente. \square

1.3.1 L'application du flot

Le théorème précédent nous fournit un outil très utile : *l'application du flot*.

THÉORÈME 5 *On considère un champ de vecteurs $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r et $X_0 \in U$. Il existe $\delta > 0$, $\epsilon > 0$ et une famille d'applications $\{\Phi^t\}_{t \in]-\epsilon, \epsilon[}$ de classe C^r définie sur $\{X \in U; |X - X_0| < \delta\}$ tels que ;*

- $\Phi^0 = \text{id}$;
- pour tous $s, t \in]-\epsilon, \epsilon[$ tels que $s + t \in]-\epsilon, \epsilon[$, $\Phi^s \circ \Phi^t = \Phi^{s+t}$;
- pour tout $X_1 \in U$, la fonction $t \mapsto \Phi^t(X_1) :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow U$ est solution de l'équation différentielle ordinaire $\dot{X} = v(X)$ sous la condition initiale $\Phi^0(X_1) = X_1$. Donc,

$$\frac{d}{dt} \Phi^t(X_1) = v(\Phi^t(X_1)).$$

La famille $\{\Phi^t\}$ est appelée le flot de l'équation différentielle ordinaire.

1.3.2 Dépendance des paramètres

Les solutions des équations différentielles ordinaires dépendent différentiablement des paramètres.

THÉORÈME 6 *On considère un champ de vecteurs $v_\lambda : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini sur un ouvert U de \mathbb{R}^n et dépendant d'un multi-paramètre λ défini sur un ouvert V de \mathbb{R}^m , de classe C^r en (X, λ) , et $(X_0, \lambda_0) \in U \times V$. Il existe $\delta > 0$, $\eta > 0$ et $\epsilon > 0$ et une fonction $\Phi(X, \lambda, t)$ de classe C^r définie sur $\{X \in U; |X - X_0| < \delta\} \times \{\lambda \in V; |\lambda - \lambda_0| < \eta\} \times \{t \in]-\epsilon, \epsilon[\}$ tels que pour tout $X_1 \in B(X_0, \delta)$ et pour tout $\lambda \in B(\lambda_0, \eta)$, la fonction $\Phi(X_1, \lambda, \cdot) :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow U$ est solution de l'équation différentielle ordinaire $\dot{X} = v_\lambda(X)$ sous la condition initiale $\Phi(X_1, \lambda, 0) = X_1$.*

PREUVE On regarde le système à paramètres comme un système sur un espace de dimension $n + m$ en introduisant les équations $\dot{\lambda} = 0$. On applique le théorème 4 au système

$$\begin{aligned}\dot{X} &= v_\lambda(X) = v(X, \lambda), \\ \dot{\lambda} &= 0.\end{aligned}\tag{1.12}$$

□

1.3.3 Théorème de redressement

THÉORÈME 7 (*Théorème de redressement*) *On considère un champ de vecteurs $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r et $X_0 \in U$ tel que $v(X_0) \neq 0$. Il existe un voisinage V de X_0 et un difféomorphisme de classe C^r , $F : V \rightarrow W$, où W est un ouvert de \mathbb{R}^n , transformant l'équation différentielle ordinaire $\dot{X} = v(X)$ en l'équation*

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= 1, \\ \dot{y}_2 &= 0, \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= 0.\end{aligned}\tag{1.13}$$

PREUVE Soit (P) un hyperplan passant par X_0 et perpendiculaire à $v(X_0)$. On prend l'origine en X_0 et on introduit des coordonnées (y_2, \dots, y_n) sur (P) . Par continuité, le champ de vecteurs est transversal à (P) sur un voisinage W' de X_0 dans (P) et il existe $\epsilon > 0$ tel que les trajectoires pour $X_1 \in W'$ sont définies pour $t \in]-\epsilon, \epsilon[$. On va définir $F^{-1} : W = W' \times]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow U$. Soit $g(y_2, \dots, y_n)$ le point de $W' \subset (P)$ de coordonnées (y_2, \dots, y_n) . On pose

$$F^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \Phi^{y_1}(g(y_2, \dots, y_n)).$$

Cette application transforme la solution de l'équation différentielle (1.13) passant par $(0, y_2, \dots, y_n)$ en la solution de l'équation différentielle ordinaire $\dot{X} = v(X)$ passant par $g(y_2, \dots, y_n)$. Pour montrer que F^{-1} est inversible sur un voisinage de 0 , il suffit, par le théorème des fonctions inverses, de montrer que

sa matrice jacobienne en 0 est inversible. La première rangée de $D(F^{-1})(0)$ est donnée par $v(X_0)$. La rangée i est donnée par un vecteur de (P) tangent à la direction y_i . Comme les rangées de la matrice sont linéairement indépendantes, $D(F^{-1})(0)$ est inversible et donc, F est un difféomorphisme d'un voisinage de X_0 sur un voisinage de 0. \square

Le théorème de redressement (appelé "flow-box theorem" en anglais) donne la classification locale des champs de vecteurs de classe C^r au voisinage d'un point non singulier. Pour compléter la classification locale, il suffit donc d'étudier le voisinage des points singuliers. En soi, c'est un programme immense qui est loin d'être complété en toute généralité.

1.3.4 Prolongement des solutions

On a vu qu'on peut construire une solution d'une équation différentielle ordinaire pour des valeurs du temps dans un intervalle $[-\epsilon, \epsilon]$. Peut-on prolonger la solution pour des valeurs de t en dehors de cet intervalle? Pas toujours. Mais l'obstruction est d'un seul type : on sort du domaine de l'équation différentielle ordinaire en un temps fini. Nous énonçons sans preuve le théorème suivant

THÉORÈME 8 *On considère une équation différentielle ordinaire $\dot{X} = v(X)$ de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^n . Soit $X_0 \in U$ et $\Phi^t(X_0)$, $t \in J$, la solution de condition initiale $\Phi^0(X_0) = X_0$ sur un intervalle ouvert maximal $J = (\alpha, \beta)$ qui est un voisinage de 0 dans \mathbb{R} . Supposons que J n'est pas égal à \mathbb{R} . Soit K un compact inclus dans U . Alors,*

- soit $-\infty < \alpha < 0$. Dans ce cas, il existe $t \in]\alpha, 0[$ tel que $\Phi^t(X_0) \notin K$;
- ou $0 < \beta < \infty$. Dans ce cas, il existe $t \in]0, \beta[$ tel que $\Phi^t(X_0) \notin K$. En particulier, soit $|\Phi^t(X_0)|$ devient non borné, ou $\Phi^t(X_0)$ s'approche de la frontière de U lorsque $t \rightarrow \beta$.

EXEMPLE 1 *Considérons l'équation différentielle sur \mathbb{R}*

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = x^2.$$

Comme elle est à variables séparables on peut l'intégrer explicitement et on obtient

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = t,$$

ce qui donne

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t},$$

et on voit que, pour $x_0 > 0$, $x(t) \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow \frac{1}{x_0}$. La solution passe donc à l'infini en temps fini.

1.4 Rappel sur les systèmes linéaires

Dans cette section nous rappelons les principaux résultats sur les systèmes d'équations différentiels linéaires à matrice constante de la forme

$$\dot{X} = AX,$$

où A est une matrice $n \times n$ à coefficients réels et $X \in \mathbb{R}^n$. Il sera parfois utile de considérer l'extension $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ qui permet d'étendre le système à \mathbb{C}^n et de permettre des changements de coordonnées qui ne préservent pas le caractère réel de la matrice.

L'importance des systèmes linéaires est qu'ils constituent une première approximation d'un système non linéaire au voisinage d'un point singulier.

EXEMPLE 2 Pour $n = 1$, l'équation différentielle $\dot{x} = ax$ a pour solution $x(t) = e^{at}x_0$ sous la condition initiale $x(0) = x_0$.

Ceci suggère que la solution du système $\dot{X} = AX$ sous la condition initiale $X(0) = X_0$ est donnée par $X(t) = e^{At}X_0$. C'est effectivement le cas, et il nous faut donc définir l'exponentielle d'une matrice carrée B .

DÉFINITION 2 Étant donnée une matrice carrée B , $n \times n$, l'exponentielle de la matrice B , notée e^B , est donnée par la somme de la série convergente suivante

$$e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!},$$

où $B^0 = I_n$ est la matrice identité.

Lorsqu'on traite de la convergence de suites de matrices on utilise la norme suivante

DÉFINITION 3 La norme d'une matrice B , $n \times n$, à entrées réelles, notée $\|B\|$, est

$$\|B\| = \max_{X \in \mathbb{S}^{n-1}} |BX|,$$

soit le maximum des normes des valeurs BX pour X sur la sphère unité

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{X \in \mathbb{R}^n; |X| = 1\}.$$

Si on permet aux entrées de B d'être complexes, alors on définit la sphère complexe de dimension $n - 1$ comme

$$\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1} = \{X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^n |x_j|^2 = 1\}.$$

On a alors

$$\|B\|_{\mathbb{C}} = \max_{X \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1}} |BX|.$$

PROPOSITION 1 La norme d'une matrice carrée $n \times n$ satisfait aux propriétés suivantes :

- Si A est une matrice $n \times n$, alors $\|A\| \geq 0$.
- Si A est une matrice $n \times n$, alors $\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0$.
- Si A et B sont deux matrices $n \times n$, alors $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
- Si A est une matrice $n \times n$ et $X \in \mathbb{R}^n$ (ou $X \in \mathbb{C}^n$), alors $|AX| \leq \|A\| \|X\|$.

En utilisant ces propriétés on peut montrer facilement que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}$ définissant e^B est convergente. (Exercice)

Le calcul de e^B se fait aisément si on utilise la forme de Jordan de B .

PROPOSITION 2 1. Soit J un bloc de Jordan $k \times k$ de la forme

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$e^J = \begin{pmatrix} e^\lambda & \lambda e^\lambda & \frac{\lambda^2}{2!} e^\lambda & \dots & \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^\lambda \\ 0 & e^\lambda & \lambda e^\lambda & \dots & \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^\lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^\lambda \end{pmatrix}.$$

2. Si A est une matrice $n \times n$ de la forme

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_r \end{pmatrix},$$

où B_j est une matrice $m_j \times m_j$ et $m_1 + \dots + m_r = n$, alors

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{B_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{B_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{B_r} \end{pmatrix}.$$

Ceci couvre le cas d'une matrice diagonale ($m_j = 1$ pour tout j).

3. Soit A une matrice $n \times n$ et S une matrice inversible telle que $SAS^{-1} = J$, où J est une matrice de Jordan. (S est la matrice de changement de base vers la base dans laquelle la matrice de l'opérateur $X \mapsto AX$ est la matrice de Jordan J .)

Alors,

$$e^A = S^{-1} e^J S.$$

4. Soit A une matrice $n \times n$ à entrées réelles et J sa matrice de Jordan. Si J a un bloc de Jordan

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

correspondant à une valeur propre λ non réelle, alors il a aussi le bloc de Jordan conjugué

$$J_2 = \bar{J}_1 = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}.$$

5. Soit $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Alors,

$$e^A = \begin{pmatrix} e^a \cos b & -e^a \sin b \\ e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix}.$$

Une des raisons pour lesquelles on a rappelé les principaux résultats sur les systèmes linéaires est qu'il servent de modèle pour l'organisation des trajectoires au voisinage d'un point singulier, au moins dans le cas où toutes les valeurs propres ont des parties réelles non nulles.

1.5 Un critère pour la stabilité asymptotique d'un point singulier

DÉFINITION 4 Un point singulier X_0 d'un champ de vecteurs $\dot{X} = v(X)$ défini sur un ouvert U est asymptotiquement stable s'il existe un voisinage V de X_0 tel que, pour tout $X_1 \in V$ alors, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(X_1) = X_0$.

1.5.1 Le cas linéaire

THÉORÈME 9 On considère le système linéaire $\dot{X} = AX$ dans \mathbb{R}^n . Si toutes les valeurs propres de A ont des parties réelles négatives, alors l'origine est asymptotiquement stable.

PREUVE On peut bien sûr changer de base pour amener la matrice A à une forme plus simple A' . Si on pose $Y = SX$, alors on a $\dot{Y} = SAS^{-1}Y$ et donc $A' = SAS^{-1}$. Dans tous les cas, la méthode sera la suivante : dans la base considérée, on va regarder la fonction

$$F(Y) = y_1^2 + \dots + y_n^2.$$

Calculons la dérivée de F le long d'une trajectoire $Y(t)$. Cette dérivée vaut

$$\frac{dF(Y(t))}{dt} = \nabla F(Y(t)) \cdot A'Y(t) = \langle 2Y(t), A'Y(t) \rangle.$$

Puisque toutes les valeurs propres de A ont des parties réelles négatives et que A et A' ont les mêmes valeurs propres, on pourra choisir S pour que $\frac{dF(Y(t))}{dt}$ que l'on notera simplement \dot{F} satisfasse

$$-C_2|Y|^2 \leq \dot{F} \leq -C_1|Y|^2, \quad (1.14)$$

pour des constantes $C_j > 0$. Ceci montre que F décroît le long des trajectoires. Mais cela ne suffit pas. Il faut voir que $\lim_{t \rightarrow \infty} F(Y(t)) = 0$. Pour cela on regarde $G(Y) = \ln Y$. Alors $-C_2 \leq \dot{G} \leq -C_1$. Donc $G(t) \leq e^{-C_1 t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. Il suffit donc de bien choisir la base (et donc S) pour que (1.14) soit vérifiée. On va regarder plusieurs cas.

(0) Il est aisé de se convaincre que si A est une matrice $n \times n$ de la forme

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_r \end{pmatrix},$$

où B_j est une matrice $m_j \times m_j$ et $m_1 + \dots + m_r = n$, alors les valeurs propres de chacune des matrices B_j ont des parties réelles négatives. Le système a la forme d'un produit

$$\dot{X}_j = B_j X_j, \quad j = 1, \dots, r.$$

La solution du système est de la forme

$$X(t) = (X_1(t), \dots, X_r(t))$$

et on aura $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = 0$ dès que $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_j(t) = 0$ pour tout j .

(i) Le cas A diagonalisable à valeurs propres réelles : on prend S telle que SAS^{-1} est diagonale.

(ii) Le cas A diagonalisable à valeurs propres complexes. Sans perte de généralité on va supposer A diagonale. Chaque fois que $\lambda \notin \mathbb{R}$ est valeur propre c'est aussi le cas de $\bar{\lambda}$. Considérons un sous-bloc $A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$. On peut supposer $\lambda = a + ib$, où $a < 0$. On va prendre la matrice $S_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$. Alors,

$$A' = S_1 A_1 S_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2} & -\frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2i} \\ \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2i} & \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \dot{F} = 2a(y_1^2 + y_2^2).$$

(iii) Le cas d'un bloc de Jordan $n \times n$ à valeur propre réelle négative

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Soit $\epsilon > 0$. On considère $J' = SJS^{-1}$, où S est la matrice diagonale

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\epsilon} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon^n} \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$J' = \begin{pmatrix} \lambda & \epsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \epsilon & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Soit $F(Y) = \sum_{i=1}^n y_i^2$. Alors,

$$\dot{F} = \lambda \sum_{i=1}^n y_i^2 + \epsilon \sum_{i=1}^{n-1} y_i y_{i+1}.$$

On a bien $\dot{F} < 0$ pour $Y \neq 0$ dès que ϵ est assez petit (exercice).

(iv) Le cas d'un bloc de Jordan J à valeur propre complexe. Alors, tel que décrit dans la proposition 2, on a aussi le bloc complexe conjugué, \bar{J} . On choisit ϵ et une matrice S comme en (iii) et on applique le même S à J et \bar{J} . On peut ensuite repasser en coordonnées réelles. (Faire les détails comme exercice).

□

1.5.2 Le cas non linéaire

DÉFINITION 5 Pour tout champ de vecteurs v défini sur un ouvert U de \mathbb{R}^n , on peut définir un opérateur de dérivation noté L_v . Étant donné une fonction $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction $L_v(F) : U \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$L_v(F)(X) = \langle \nabla F(X), v(X) \rangle$$

et appelée dérivée de Lie de F le long de v . $L_v(F)$ représente le \dot{F} défini plus haut.

THÉORÈME 10 On considère une équation différentielle ordinaire $\dot{X} = v(X)$ donnée par un champ de vecteurs de classe C^1 , $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, sur un ouvert U de \mathbb{R}^n et un point

singulier X_0 de v . Soit $A = Dv(X_0)$ la matrice jacobienne de v en X_0 . Si toutes les valeurs propres de A ont des parties réelles négatives, alors X_0 est asymptotiquement stable.

PREUVE Sans perte de généralité, on peut supposer qu'on a appliqué au préalable une translation qui a ramené X_0 à 0 . Au voisinage de 0 , le champ de vecteurs a la forme $v(X) = AX + o(X)$. On applique un changement linéaire de coordonnées $Y = SX$ tel que, si $A' = SAS^{-1}$ et $F(Y) = \sum_{i=1}^n y_i^2$ alors, pour le système linéaire $\dot{Y} = A'Y = w_{A'}$, on a $L_{w_{A'}} = Q(Y)$, où Q est une forme quadratique définie négative. Donc, il existe $\delta > 0$ tel que $Q(Y) \leq -\delta|Y|^2$. Regardons maintenant la dérivée de Lie de F le long du champ v :

$$L_v(F) = Q(Y) + o(|Y|^2) \leq -\delta|Y|^2 + o(|Y|^2).$$

Il existe donc $\epsilon > 0$ et δ' tels que $L_v(F) < -\delta'|Y|^2$ pour $|Y| < \epsilon$ et on conclut à la stabilité asymptotique comme au théorème 9. \square

EXEMPLE 3 On considère le système de Lorenz

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz, \\ \dot{z} &= -\beta z + xy, \end{aligned} \tag{1.15}$$

dépendant des trois paramètres positifs ρ, σ, β . Cherchons les points singuliers. La première équation donne $x = y$ et la troisième $z = x^2/\beta$. En remplaçant dans la seconde on obtient $(\rho - 1)x - x^3/\beta = x(\rho - 1 - x^2/\beta)$. Donc, on a toujours la solution $(0, 0, 0)$ et, pour $\rho > 1$ on a les deux autres points singuliers

$$P_+ = \left(\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1 \right), P_- = \left(-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1 \right).$$

Remarquons que les trois points singuliers sont confondus pour $\rho = 1$. Étudions maintenant la stabilité de l'origine. La matrice jacobienne est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne en $(0, 0, 0)$ vaut donc

$$A(0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix},$$

dont le polynôme caractéristique $\det(\lambda I - A(0))$ est donné par

$$(\lambda + \beta)(\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - \rho)).$$

Alors, les valeurs propres sont $-\beta$ et les deux racines de

$$q(\lambda) = \lambda^2 - (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - \rho).$$

Ces deux racines sont réelles de signe contraire si $1 - \rho < 0$, c'est-à-dire $\rho > 1$. Dans ce cas, l'origine est instable puisqu'on a deux valeurs propres négatives et une valeur propre positive. Si $\rho < 1$, le produit des racines de q est positif et la somme des racines est $-\sigma - 1 < 0$. Donc, on a soit deux racines réelles négatives, soit deux racines complexes de partie réelle négative. Dans tous les cas, l'origine est asymptotiquement stable. Si $\rho = 1$ on a une valeur propre nulle et on ne peut conclure.

Étudions maintenant la stabilité des points singuliers P_{\pm} . La matrice jacobienne en ces points est donnée par

$$A(P_{\pm}) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp \sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ \pm \sqrt{\beta(\rho - 1)} & \pm \sqrt{\beta(\rho - 1)} & -\beta \end{pmatrix}.$$

dont le polynôme caractéristique $\det(\lambda I - A(P_{\pm}))$ est donné par

$$\lambda^3 - \lambda^2(1 + \sigma + \beta) + \lambda\beta(\sigma + \rho) + 2\beta\sigma(\rho - 1).$$

Ce polynôme est de la forme $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$. Nous allons montrer au lemme ?? que les trois racines ont des parties réelles négatives sous les conditions $a > 0$, $c > 0$ et $ab - c > 0$. Les deux premières conditions sont vérifiées pour $\rho > 1$. De plus

$$\begin{aligned} ab - c &= \beta(1 + \sigma + \beta)(\sigma + \beta) - \beta\rho \\ &= \beta[-\rho(\sigma - \beta - 1) + \sigma(1 + 3\sigma + \beta)]. \end{aligned}$$

On voit que si $\sigma - \beta - 1 > 0$, les points P_{\pm} sont asymptotiquement stables pour

$$\rho < \rho_H = \frac{\sigma(1 + 3\sigma + \beta)}{\sigma - \beta - 1}.$$

Le système de Lorenz est en général étudié pour $\sigma = 10$ et $\rho = \frac{8}{3}$. Pour ces valeurs, $\sigma - \beta - 1 > 0$ et $\rho_H \sim 24,74..$

LEMME 1 (Critère de Routh-Hurwitz) Le polynôme $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ a trois racines de partie réelle négative sous les conditions, $c > 0$ et $ab - c > 0$.

PREUVE On peut diviser l'espace (a, b, c) en régions où les signes des parties réelles des racines sont constants. En effet, les racines dépendent continûment de a, b, c . Il n'y a que deux manières dont le signe des racines peut changer.

- Une racine s'annule : ceci se produit si $c = 0$;
- deux racines traversent l'axe imaginaire. Le polynôme p a toujours une racine réelle x_1 . Soit $x_{2,3} = \pm i\omega$ les deux racines imaginaires pures. On a $x_1 + x_2 + x_3 = -a$. Or, $x_1 + x_2 + x_3 = -a = x_1$. Donc, $-a$ est racine de p , c'est-à-dire

$$p(-a) = (-a)^3 + a(-a)^2 - ba + c = c - ba = 0.$$

Cependant, sur la surface $c = ab$, il faut éliminer le cas de deux valeurs propres réelles opposées. On a $p(x)|_{c=ab} = (x+a)(x^2+b)$. Pour $b < 0$, on a donc trois racines réelles et aucune racine ne traverse l'axe imaginaire. Donc seule la portion de la surface $c = ab$ correspondant à $b > 0$ est pertinente.

La surface $c = 0$ et la demi-surface $c = ab$, $b > 0$ divisent l'espace en 4 régions ouvertes (faire le dessin) et dans chacune il suffit de prendre un point pour voir quel est le signe des parties réelles des racines de $p(x)$

- la région $R_1 = \{(a, b, c) \mid c > 0, c < ab, a, b > 0\}$: les trois racines ont des parties réelles négatives ;
- la région $R_2 = \{(a, b, c) \mid c > 0\} \setminus R_1$: une racine a une partie réelle négative et deux racines ont des parties réelles positives ;
- la région $R_3 = \{(a, b, c) \mid c < 0, c > ab, a < 0, b > 0\}$: les trois racines ont des parties réelles positives ;
- la région $R_4 = \{(a, b, c) \mid c < 0\} \setminus R_3$: une racine a une partie réelle positive et deux racines ont des parties réelles négatives.

□

1.6 Ensembles α -limite et ω -limite d'une trajectoire. Ensembles invariants

DÉFINITION 6 On se donne un champ de vecteurs $v(X)$ de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^n . Soit $X_0 \in U$ et sa trajectoire $X(t, X_0) = \phi^t(X_0)$.

1. L'ensemble α -limite de la trajectoire de X_0 est l'ensemble (s'il existe) des points X_1 tels qu'il existe une suite $t_n \rightarrow -\infty$ pour laquelle $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{t_n}(X_1) = X_0$.
2. L'ensemble ω -limite de la trajectoire de X_0 est l'ensemble (s'il existe) des points X_2 tels qu'il existe une suite $t_n \rightarrow +\infty$ pour laquelle $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{t_n}(X_2) = X_0$.

EXEMPLE 4 L'ensemble α -limite ou ω -limite d'une trajectoire peut être un point singulier, un cycle limite, un ensemble de points singuliers et de trajectoires les joignant.

DÉFINITION 7 On se donne un champ de vecteurs $v(X)$ de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^n .

Un sous ensemble M de U est positivement (resp. négativement) invariant si pour tout $X_0 \in M$, la trajectoire positive de X_0 , soit l'ensemble des points $\{\phi^t(X_0) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$ est incluse dans M .

1. Un sous ensemble M de U est invariant s'il est positivement et négativement invariant.

THÉORÈME 11

L'ensemble ω -limite (resp. α -limite) d'une trajectoire invariant.

PREUVE. Soit Γ l'ensemble ω -limite de trajectoire positive d'un point X_0 et soit $X_1 \in \Gamma$. Soit $T \in \mathbb{R}$. On doit montrer que $\phi^T(X_1) \in \Gamma$. Il existe une suite $t_n \in \mathbb{R}^+$, telle que $t_n \rightarrow +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{t_n}(X_0) = X_1$. Comme $t_n \rightarrow +\infty$, il existe m tel que $t_n > T$ pour $n > m$. Considérons la suite des temps $\tau_n = t_{m+n} + T$. on a $\tau_n > 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n \rightarrow +\infty$. Alors,

$$\phi^{\tau_n}(X_0) = \phi^T(\phi^{t_{m+n}}(X_0)) \rightarrow \phi^T(X_1).$$

Donc, $\phi^T(X_1) \in \Gamma$.

□

