Chapitre 1

Introduction à la théorie des graphes

La théorie des graphes est un outil très puissant pour modéliser des situations concrètes, détecter des incohérences, par exemple dans des enquêtes policières, et résoudre des problèmes concrets de transports, d'horaires, etc. Dans ce chapitre on traitera de trois types de problèmes et de leurs applications. Le premier problème remonte à Leonhard Euler (1707-1783) : quand peut-on parcourir toutes les arêtes d'un graphe sans repasser deux fois sur la même arête ? Euler a créé la théorie des graphes pour résoudre le célèbre problème des ponts de Königsberg. Le deuxième problème est celui de décider si un graphe est planaire, c'est-à-dire si on peut le dessiner dans un plan sans que deux arêtes se croisent. Ici encore, c'est Euler qui a donné une solution. Le troisième problème est celui du coloriage d'un graphe : quel est le nombre minimal de couleurs nécessaire pour colorier les sommets d'un graphe de telle sorte que chaque paire de sommets reliés par une arête ait des couleurs différentes.

1.1 Exemples

Nous montrons trois exemples de situations que l'on peut modéliser avec des graphes et dont on discutera avec les outils développés dans ce chapitre.

EXEMPLE 1 **Les ponts de Königsberg** *Regardons la figure 1.1 : peut-on partir d'un point, passer sur tous les ponts exactement une fois et revenir au point de départ ? Si vous cherchez une solution vous n'en trouverez pas. Mais, comment prouver que le problème est vraiment impossible ? C'est le mathématicien suisse, Leonhard Euler, qui a modélisé le problème à l'aide d'un graphe et démontré l'impossibilité. Le graphe construit par Euler apparait à la figure 1.2. On associe un sommet à chaque région*

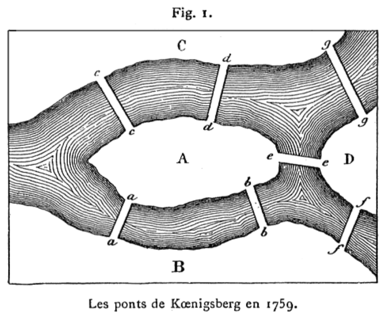


FIGURE 1.1 – Les ponts de Königsberg (image prise sur Internet)

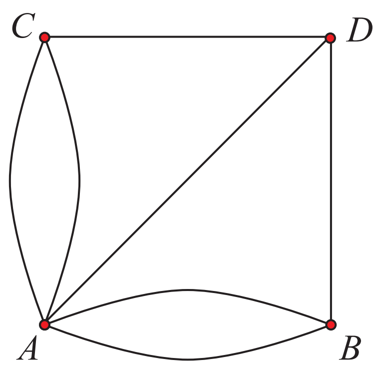


FIGURE 1.2 – Le graphe modélisant les ponts de Königsberg

sur la terre ferme. On a une arête entre deux sommets pour chaque pont reliant les deux régions. Ainsi, partir d'un point, passer par tous les ponts exactement une fois et revenir au point de départ revient à partir d'un sommet, parcourir toutes les arêtes exactement une fois et revenir au sommet de départ. On voit tout de suite sur le graphe qu'il y a trois arêtes associées aux sommets B*,* C *et* D *: on dit que ces sommets sont de degré* 3*. Donc le problème est impossible car si on parcourt les trois arêtes de sommets* B*, on est coincé en* B *et on ne peut plus repartir sans utiliser une arête déjà parcourue. On voit aussi que, même si on enlève la contrainte de revenir au point de départ, il n'existe pas de chemin parcourant tous les ponts exactement une fois, parce qu'on a trois sommets de degré* 3*.*

Ce qui est remarquable, c'est la puissance de l'abstraction : ces mêmes idées nous permettent de répondre très facilement pour un graphe très compliqué dont on ne pourrait pas explorer toutes les possibilités à la main.

EXEMPLE 2 **La confection d'horaires** *Le département doit organiser sept examens finaux pour les cours numérotés* 1 *à* 7 *sur un nombre minimal de jours, tout en res-*

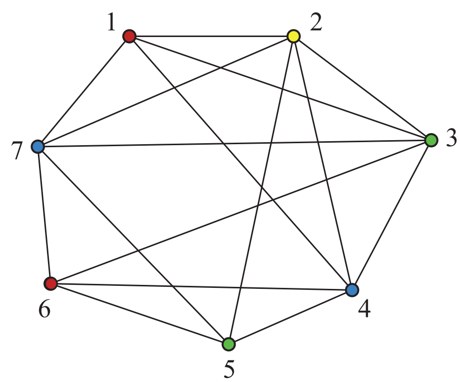


FIGURE 1.3 – Le coloriage du graphe de l'exemple 2

pectant la contrainte qu'aucun étudiant n'ait à passer deux examens la même journée. Les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,7)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(2,7)$, $(3,4)$, $(3,6)$, $(3,7)$, $(4,5)$, $(4,6)$, $(5,6)$, $(5,7)$ *et* $(6,7)$. *Quel est le nombre minimal de jours pour organiser ces examens ?*

Encore une fois on modélise par un graphe : On associe un sommet à chaque cours. Deux sommets sont reliés par une arête si les deux cours ont des étudiants communs. Alors, deux cours reliés par une arête ne peuvent avoir leur examen le même jour. On colorie chaque sommet du graphe de telle sorte que deux sommets reliés par une arête soient coloriés d'une couleur différente. Le nombre minimal de couleurs est appelé le nombre chromatique du graphe. Dans notre exemple, ce nombre est 4 et donne la solution de notre problème : voir figure 1.3. Par exemple, on peut placer les examens 1 et 5 le premier jour, les examens 2 et 6 le deuxième jour, l'examen 3 le troisième jour, et les examens 4 et 7 le dernier jour.

EXEMPLE 3 *Dans une résidence étudiante on veut aménager des appartements pour deux étudiants et des appartements pour trois étudiants. Chaque étudiant doit avoir accès à la cuisine, à la salle de bain et au couloir extérieur sans déranger ses colocataires. Comme l'espace est restreint et qu'on veut maximiser le nombre d'appartements, on aimerait bien pouvoir rencontrer ces contraines sans aménager de couloir intérieur dans l'appartement. En fait, c'est possible pour les appartements de deux chambres, mais pas pour ceux de trois chambres.*

Encore une fois, on modélise cela par un graphe $G = (V, E)$ *pour chaque appartement, à 5 ou 6 sommets selon que l'appartement a deux ou trois chambres. L'ensemble des sommets est de la forme* $V_1 \cup V_2$, *où* V_1 *contient un sommet* a *pour la cuisine, un sommet* b *pour la salle de bain et un sommet* c *pour le couloir extérieur, et* V_2 *contient un sommet pour chaque chambre que l'on appellera* d, e, *et éventuellement* f. *Il n'ya aucune arête entre deux sommets de* V_1 *et aucune arête entre deux sommets de* V_2. *Un tel graphe est appelé* biparti. *On doit avoir une arête entre chaque sommet de* V_1 *et chaque sommet de* V_2, *laquelle correspondra à une porte entre les deux*

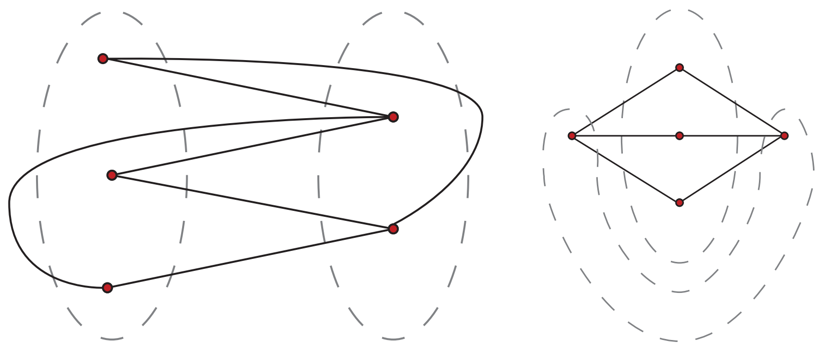


FIGURE 1.4 – Deux présentations du graphe $K_{3,2}$)

lieux : un tel graphe est appelé biparti complet. *Pour qu'on puisse réaliser un tel graphe, on voit qu'il faut pouvoir dessiner ce graphe dans le plan sans que deux arêtes se coupent (ailleurs qu'en un sommet) : un graphe ayant cette propriété est dit* planaire. *Si* $|V_1| = p$ *et* $|V_2| = q$, *on note le graphe biparti complet associé* $K_{p,q}$. *On vérifie aisément que* $K_{3,2}$ *est planaire (voir figure 1.4).*

Par contre, on n'arrive pas à dessiner $K_{3,3}$ *dans un plan. On prouvera plus tard que ce n'est pas possible.*

Autre leçon : la figure 1.4 montre deux représentations très différentes du même graphe $K_{3,2}$ *: on dit que les deux graphes sont isomorphes. Ce n'est pas toujours un problème facile de décider si deux graphes sont isomorphes.*

EXEMPLE 4 **L'aide aux enquêtes policières** *Exemple inspiré de la nouvelle de Claude Berge ≪ Qui a tué le Duc de Densmore ? ≫, ainsi que du recueil ≪ Introduction à la théorie des graphes ≫ de Didier Müller. Le Duc a été tué par une bombe qui a complètement détruit le château. Les journaux d'alors relatent que le testament détruit dans l'explosion pouvait déplaire à une des sept épouses du Duc, et que celui-ci avait justement invité toutes ses épouses à le visiter peu de temps avant sa mort. La bombe avait été fabriquée pour être cachée dans l'armure de la chambre à coucher, ce qui suppose que l'assassin était venu plus d'une fois au chaâteau. Lors d'un interrogatoire, les épouses ont toutes affirmé qu'elles ne sont venues qu'une fois au chaâteau.*

Anne a rencontré Béatrice, Charlotte, Frédérique et Georgette.

Béatrice a rencontré Anne, Charlotte, Édith, Frédérique et Hélène.

Charlotte a rencontré Anne, Béatrice et Édith.

Édith a renontré Béatrice, Charlotte et Frédérique.

Frédérique a rencontré Anne, Béatrice, Édith et Hélène.

Georgette a rencontré Anne et Hélène.

Hélène a rencontré Béatrice, Frédérique et Georgette.

Les réponses sont concordantes et rien n'indique qu'une des épouses a menti. Dessinons un graphe dont les sommets sont les sept épouses. Deux sommets sont reliés par une arête si les deux épouses se sont rencontrées (figure 1.5). Ce graphe est ce qu'on

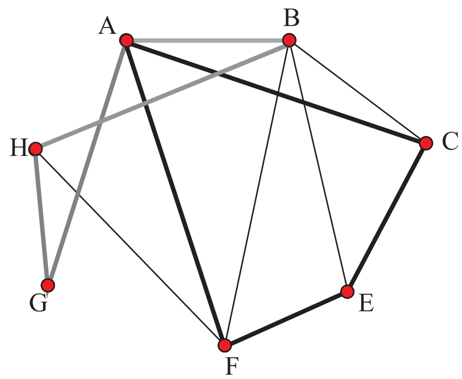


FIGURE 1.5 – Le graphe de l'exemple 4 et les deux cycles de longueur 4 sans diagonale en trait gras

appelle un graphe d'intervalles. La théorie nous dit qu'il ne peut avoir un cycle de longueur 4 sans diagonale. Or, dans le graphe on en a deux. Donc, quelqu'un a menti... Le seul sommet commun aux deux cycles de longueur 4 est A*. Donc, c'est Anne qui a menti et qui va se faire accuser d'assassinat.*

1.2 Définitions

DÉFINITION 1 *Un* graphe orienté *est la donnée d'un ensemble* V *de* sommets *ou* nœuds *et d'un sous-ensemble* $E \subset V \times V$ *d'*arêtes orientées*. On note le graphe* $G = (V, E)$*. Dans le cas d'un* graphe non orienté *on ne met pas d'orientation sur les arêtes. On identifie donc les paires* (a, b) *et* (b, a) *et on les note plutôt* $\{a, b\}$*, où* $a, b \in S$ *(voir figure 1.6). Lorsqu'on parle de* graphe *sans préciser, il s'agit d'un graphe non orienté.*

Dans ce chapitre on parlera plus de graphes non orientés.

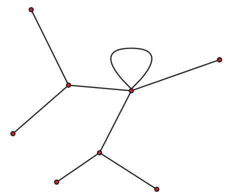
DÉFINITION 2 *Soient* $G = (V, E)$*, un graphe et* $(a, b) \in E$ *une arête de* G*.*

1. *On dit que l'arête* (a, b) *est* incidente *aux sommets* a *et* b*. On dit aussi que le sommet* b *est* adjacent *au sommet* a *et que le sommet* a *est adjacent à* b*.*
2. *Une* boucle *dans le graphe* G *est une arête* $\{a, a\}$ *(identifiée à* (a, a) *si le graphe est orienté).*

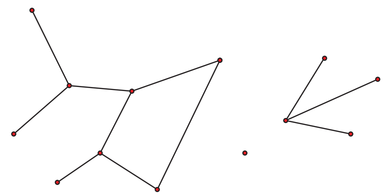
DÉFINITION 3 *Soient* $G = (V, E)$ *un graphe, et* x *et* y *deux sommets dans* G*. Une* marche *dans* G *de* x *à* y *est une suite alternée de sommets et d'arêtes commençant à* x *et se terminant à* y *de la forme*

$$x = x_0, e_1 = \{x_0, x_1\}, x_1, e_2 = \{x_1, x_2\}, x_2, \ldots, x_{n-1}, e_n = \{x_{n-1}, x_n\}, x_n = y.$$

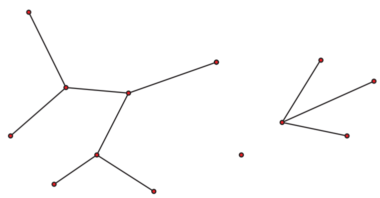
La longueur *de la marche est* n*. Si* $n = 0$*, alors* $x = y$ *et la marche est* triviale.



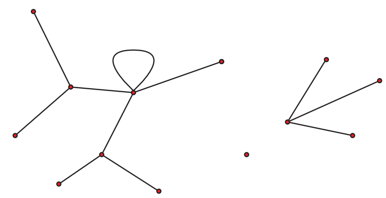
(a) un graphe connexe



(b) un graphe avec un cycle



(c) un graphe sans cycle



(d) un graphe général

FIGURE 1.6 – Quatre exemples de graphes

1. *Si* $x = y$ *et* $n > 1$, *la marche est* fermée.
2. *Sinon la marche est* ouverte.
3. *Si aucune arête n'est répétée, la marche est une* chaîne.
4. *Une chaîne fermée est appelée un* circuit.
5. *Si la marche ne repasse par aucun sommet, la marche est un* chemin.
6. *Un chemin fermé est appelé un* cycle.

Dans le cas d'un graphe orienté, on parle de marche orientée, chaîne orientée, chemin orienté, *etc.*

THÉORÈME 1 *Soient* $G = (V, E)$ *et* $a, b \in S$, $a \neq b$. *S'il existe une chaîne dans* G *de* a *à* b, *alors il existe un chemin dans* G *de* a *à* b.

DÉFINITION 4 *Soient* $G = (V, E)$ *un graphe (orienté ou non) et* $G_1 = (V_1, E_1)$. G_1 *est un sous-graphe de* G *si* $V_1 \subset V$, $E_1 \subset E$ *et toute arête de* E_1 *est incidente à des sommets qui sont dans* V_1. *En particulier* $G_1 = (V_1, E_1)$ *est un graphe.*

DÉFINITION 5 *Un graphe* $G = (V, E)$ *est* connexe *si pour tous sommets distincts* a *et* b, *il existe un chemin dans* G *de* a *à* b. *Un graphe non connexe est dit* disconnexe. *Il est alors une réunion de graphes connexes. La* composante connexe *d'un sommet est le plus grand sous-graphe connexe auquel il appartient. On note par* $\kappa(G)$ *le nombre de composantes connexes de* G.

DÉFINITION 6 *Une paire* $G = (V, E)$ *est un* multigraphe *d'ensemble de sommets* V *et d'ensembles d'arêtes* E *si pour une paire de sommets* $x, y \in V$ *il existe au moins deux arêtes de sommets* x *et* y. *Pour un multigraphe orienté, on demande qu'il existe* *au moins deux arêtes de même origine* x *et de même extrémité* y*. Si on a* n *arêtes d'origine* x *et* y *on dira que l'arête* (x, y) *a* multiplicité m.

DÉFINITION 7 *Soient* $G = (V, E)$ *un graphe (orienté ou non) et* $G_1 = (V_1, E_1)$ *un sous-graphe. Le sous-graphe est dit* couvrant *si* $V_1 = V$.

DÉFINITION 8 *Soient* $G = (V, E)$ *un graphe (orienté ou non) et* $U \subset V$*. Le* sous-graphe de G induit par U *est le graphe* $G_1 = (U, E_1)$ *où* E_1 *est l'ensemble de toutes les arêtes de* E *dont les sommets sont dans* U.

DÉFINITION 9 *Soient* $G = (V, E)$ *un graphe (orienté ou non),* $v \in V$ *et* $e \in E$.

1. *Le sous-graphe* $G_1 = G - v$ *est le sous-graphe de* G *induit par* $U = V \setminus \{v\}$.
2. *Le sous-graphe* $G_2 = G - e$ *est le graphe* $G_2 = (V, E_2)$*, où* $E_2 = E \setminus \{e\}$.

DÉFINITION 10 *Soit* V *un ensemble de* n *sommets. Le* graphe complet *sur* V*, noté* K_n*, est le graphe non orienté d'ensemble de sommets* V *et contenant exactement une arête* $\{a, b\}$ *pour tous les* $a, b \in V$*, où* $a \neq b$*. (Un graphe complet n'a pas de boucle.)*

DÉFINITION 11 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe non orienté sans boucle sur* n *sommets. Le* complément de G*, noté* $\overline{G}$*, est le sous-graphe de* K_n*, dont l'ensemble des sommets est* V *et les arêtes sont celles de* K_n *qui ne sont pas dans* E*. Si* $G = K_n$*, alors* $\overline{G}$ *n'a aucune arête. Il est appelé un* graphe nul.

DÉFINITION 12 *Soient* $G_=(V_1, E_1)$ *et* $G_2 = (V_2, E_2)$ *deux graphes non orientés. Une fonction* $f : V_1 \to V_2$ *est un* isomorphisme *de graphes si* f *est bijective, c'est-à-dire injective et surjective et si* $\{a, b\} \in E_1$ *si et seulement si* $\{f(a), f(b)\} \in E_2$.

1.3 Degré d'un sommet. Chaînes et circuits eulériens.

DÉFINITION 13 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe ou multigraphe non orienté. Le* degré *d'un sommet* v*, noté* $\deg(v)$*, est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. En particulier une boucle incidente à un sommet compte pour deux arêtes incidentes à ce sommet. (Voir figure 1.7.)*

THÉORÈME 2 **Lemme des poignées de main** *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe ou multigraphe non orienté. Alors,*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

COROLLAIRE 1 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe ou multigraphe non orienté. Alors, le nombre de sommets de degré impair est pair.*

DÉFINITION 14 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe ou multigraphe non orienté.* G *est dit* régulier *si tous les sommets ont le même degré. Si ce degré est* k*, alors* G *est dit* k*-régulier. Le graphe complet* K_n *est le cas particulier quand* $|V| = n$ *et* $k = n - 1$.

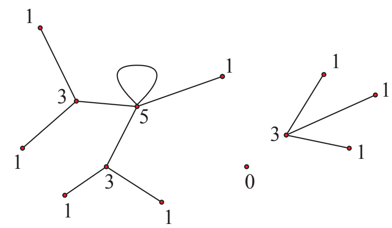


FIGURE 1.7 – Le degré des sommets d'un graphe

DÉFINITION 15 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe ou multigraphe non orienté sans sommet isolé. Un* circuit eulérien *dans* G *est un circuit qui traverse chaque arête exactement une fois. Une* chaîne eulérienne *dans* G *de* a *à* b *est une chaîne de* a *à* b *qui traverse chaque arête exactement une fois.*

THÉORÈME 3 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe ou multigraphe non orienté sans sommet isolé. Alors,* G *a un circuit eulérien si et seulement si* G *est connexe et tous les sommets sont de degré pair.* G *a une chaîne eulérienne de* a *à* b *si et seulement* a *et* b *sont de degré impair et tous les autres sommets sont de degré pair.*

1.4 Graphes planaires

DÉFINITION 16 *Un graphe* $G = (V, E)$ *est* planaire *si on peut le dessiner dans le plan de telle sorte que les seuls points d'intersection des arêtes soient situés en des sommets. Un tel dessin est un* plongement du graphe dans le plan.

EXEMPLE 5 *On prend une carte géographique avec des pays. À chaque pays on associe un sommet. On a une arête entre deux sommets si les pays correspondants ont une frontière commune. Ce graphe est planaire.*

EXEMPLE 6 *Les graphes* K_3 *et* K_4 *sont planaires. Le graphe* K_5 *est non planaire.*

On veut comprendre sous quelle condition un graphe est planaire.

DÉFINITION 17 *Un graphe* $G = (V, E)$ *est* biparti *si* $V = V_1 \cup V_2$, *où* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ *et toute arête de* G *est de la forme* $\{a, b\}$ *avec* $a \in V_1$ *et* $b \in V_2$. *Le graphe est* biparti complet *si* $E = \{\{a, b\}; a \in V_1, b \in V_2\}$, *c'est-à-dire qu'il existe une arête joignant chaque sommet de* V_1 *à chaque sommet de* V_2. *Si* $|V_1| = m$ *et* $|V_2 = n|$, *le graphe biparti complet est noté* $K_{m,n}$.

EXEMPLE 7 *Le graphe* $K_{3,3}$ *est non planaire.*

DÉFINITION 18 1. *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe sans boucle. Une* subdivision élémentaire *de* G *est un graphe* $G_1 = (V_1, E_1)$ *obtenu en ajoutant un sommet*

$v \notin V$ *:* $V_1 = V \cup \{v\}$*, et en retirant une arête* $\{a, b\}$ *pour la remplacer par deux arêtes* $\{a, v\}$ *et* $\{v, b\}$ *:* $E_1 = E \cup \{\{a, v\}, \{v, b\}\} \setminus \{\{a, b\}\}$.

2. *Deux graphes sont* homéomorphes *s'ils sont isomorphes ou s'ils peuvent être obtenu du même graphe* H *sans boucle par une suite de subdivisions élémentaires.*

THÉORÈME 4 *(Théorème de Kuratowski) Un graphe* $G = (V, E)$ *est non planaire si et seulement si il contient un sous-graphe homéomorphe à* K_5 *ou* $K_{3,3}$.

Pour montrer ce théorème il faut trouver un critère permettant de montrer qu'un graphe est planaire. Un tel critère a été établi par Euler.

THÉORÈME 5 *(Théorème d'Euler) Un graphe* $G = (V, E)$ *ou multigraphe planaire connexe. Soit* $|V| = v$, $|E| = e$*, et soit* r *le nombre de régions du plan limitées par les arêtes dans un plongement du graphe sans intersection dans le plan, incluant la région infinie. Alors*

$$v - e + r = 2. \tag{1.1}$$

On pourra en tirer des conséquences dans le cas d'un graphe sans boucle. En effet, dans ce cas, la frontière de chaque région contient au moins trois arêtes.

DÉFINITION 19 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe planaire. Le* degré *d'une région est le nombre d'arêtes de sa frontière.*

COROLLAIRE 2 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe planaire connexe sans boucle. Soit* $|V| = v$, $|E| = e$*, et soit* r *le nombre de régions du plan limitées par les arêtes dans un plongement du graphe sans intersection dans le plan. Alors*

$$\begin{cases} 3r \leq 2e, \\ e \leq 3v - 6. \end{cases}$$

PREUVE Sous ces hypothèses, chaque région a au moins degré 3, donc est bordée par au moins trois arêtes. Mais, chaque arête est partagée par deux régions. Donc, $3r \leq 2e$. On replace dans la formule (1.1). Alors

$$2 = v - e + r \leq v - e + \frac{2}{3}e = v - \frac{e}{3}.$$

En multipliant par 3 on obtient $6 \leq 3v - e$, ce qui donne la deuxième inégalité. □

COROLLAIRE 3 K_5 *n'est pas planaire.*

PREUVE Dans K_5 on a 10 arêtes et 5 sommets. Donc. $e = 10$ et $v = 5$. Alors, $e = 10 > 3 \times 5 - 6 = 9$, en contradiction avec le corollaire 2. □

COROLLAIRE 4 $K_{3,3}$ *n'est pas planaire.*

PREUVE Dans $K_{3,3}$, il faut se convaincre que chaque région a degré supérieur ou égal à 4. En effet, comme le graphe est biparti, il ne peut avoir de cycle de longueur 3, puisque tout chemin alterne entre V_1 et V_2. Alors, on peut montrer, comme dans le corollaire 2, que $4r \leq 2e$, donc $2r \leq e$. On a aussi $v = 6$ et $e = 9$. Supposons que le graphe est planaire. Alors, $2 = v - e + r \leq v - e + \frac{e}{2} = v - \frac{e}{2} = 6 - \frac{9}{2}$, en contradiction avec la formule d'Euler (1.1). □

DÉFINITION 20 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe planaire que l'on considère dessiné sur un plan. Un* graphe dual *de* G*, noté* G^d*, est un graphe construit ainsi. On choisit un point dans chaque région du plan déterminée par le graphe, y compris la région infinie. Ces points seront les sommets de* G^d*. Deux sommets de* G^d *sont reliés par une arête si les deux régions de* G *auxquels ils appartiennent ont une arête commune.*

REMARQUE 1

1. *Si* G *est planaire, alors* G^d *est planaire.*
2. *Il se peut que deux graphes planaires isomorphes aient des graphes duaux non isomorphes.*

1.5 Coloriage de graphes et polynôme chromatique

DÉFINITION 21 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe. Un* coloriage propre *de* G *est l'assignation d'une couleur à chaque sommet de* G *de telle sorte deux sommets adjacents ont des couleurs différentes : pour toute arête* $\{a, b\}$ *de* E*, les couleurs assignées à* a *et* b *sont différentes. Le nombre minimal de couleurs nécessaire pour colorier un graphe est appelé le* nombre chromatique *de* G *et noté* $\chi(G)$.

Voici une borne pour le nombre chromatique

THÉORÈME 6 *Soit*$G = (V, E)$ *un graphe et* r *le degré maximum de ses sommets. Alors* $\chi(G) \leq r + 1$.

PREUVE Montrons qu'on peut colorier le graphe avec $r + 1$ couleurs. On y va sommet par sommet. On colorie le premier sommet. À chaque nouveau sommet il est adjacent à au plus r sommets déjà coloriés. Donc, il existe une couleur non utilisée avec lequel le colorier. □

Déterminer le nombre chromatique d'un graphe est un problème non trivial. Un outil pour le faire est le *polynôme chromatique* $P(G, \lambda)$ dans la variable λ. Le polynôme chromatique doit avoir la propriété que, si $\lambda \in \mathbb{N}^*$, alors $P(G, \lambda)$ représente le nombre de coloriages différents du graphe avec λ couleurs. Si un tel polynôme existe, alors le nombre chromatique sera le plus petit entier $\lambda > 0$ tel que $P(G, \lambda) \neq 0$.

DÉFINITION 22 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe et* $e = \{a, b\} \in E$*. Le graphe* G_e *est défini comme* $G_e = (V, E \setminus \{e\})$*, autrement dit, on enlève l'arête* e *mais pas ses sommets. Le graphe* G'_e *est le graphe obtenu de* G_e *en identifiant les sommets* a *et* b *de* E.

A priori, les graphes G_e et G'_e sont plus simples que G, et donc leurs polynômes chromatiques sont plus simples à calculer. Le théorème suivant donne $P(G,\lambda)$ en fonction de $P(G_e,\lambda)$ et $P(G'_e,\lambda)$.

THÉORÈME 7 *(Théorème de décomposition pour les polynômes chromatiques) Soit* $G = (V,E)$ *un graphe et* $e \in E$. *Alors*

$$P(G_e,\lambda) = P(G,\lambda) + P(G'_e,\lambda).$$

PREUVE $P(G_e,\lambda)$ représent le nombre coloriages propres de G_e. Ceux-ci sont de deux types :

- les coloriages propres pour lesquels a et b sont de couleur différente. Ce sont alors des coloriages propres de G. Ils sont au nombre de $P(G,\lambda)$;
- les coloriages propres pour lesquels a et b sont de la même couleur. Ce sont alors des coloriages propres de G'_e. Ils sont au nombre de $P(G'_e,\lambda)$.

Donc, $P(G_e,\lambda) = P(G,\lambda) + P(G'_e,\lambda)$. □

EXEMPLE 8 **Polynôme chromatique d'un graphe complet**

$$P(K_n,\lambda) = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-(n-1)).$$

Dans la littérature on utilise souvent la notation

$$\lambda^{(n)} = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-(n-1)).$$

Tout graphe peut-être obtenu à partir d'un graphe complet en enlevant des arêtes. Si on peut suivre ce qu'il advient du polynôme chromatique quand on fait cela, alors on pourra calculer le polynôme chromatique d'un graphe quelconque.

THÉORÈME 8 *Soit* $G = (V,E)$ *un graphe, et* a, b *deux sommets tels que* $e = \{a,b\} \notin E$. *Soit* $G^+_e = (V, E \cup \{e\})$ *le graphe obtenu en ajoutant* e *comme arête, et soit* G^{++}_e *le graphe obtenu de* G *en identifiant* a *et* b. *Alors*

$$P(G,\lambda) = P(G^+_e,\lambda) + P(G^{++}_e,\lambda).$$

PREUVE $P(G,\lambda)$ représent le nombre coloriages propres de G. Ceux-ci sont de deux types :

- les coloriages propres pour lesquels a et b sont de couleur différente. Ce sont alors des coloriages propres de G^+_e. Ils sont au nombre de $P(G^+_e,\lambda)$;
- les coloriages propres pour lesquels a et b sont de la même couleur. Ce sont alors des coloriages propres de G^{++}_e. Ils sont au nombre de $P(G^{++}_e,\lambda)$.

Donc, $P(G,\lambda) = P(G^+_e,\lambda) + P(G^{++}_e,\lambda)$. □

EXEMPLE 9 *Prenons une carte géographique pour laquelle on se demande quel est le nombre minimal de couleurs que l'on doit utiliser pour la colorier, sans que deux pays voisins soient de la même couleur. On modélise cette carte comme un graphe planaire. Soit* G^d *le graphe dual, et* G^d_1 *le sous-graphe induit en enlevant le sommet*

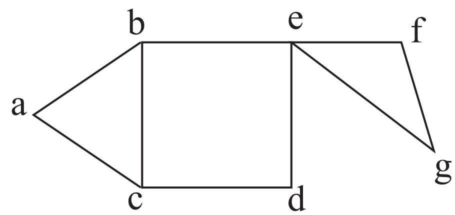


FIGURE 1.8 – Le graphe de l'exercice 1

correspondant à la région infinie. Alors, le nombre minimal de couleurs nécessaire pour colorier la carte est le nombre chromatique du graphe G_1^d*. Le célèbre théorème des quatre couleurs démontré en 1976 dit que toute carte peut être coloriée avec au plus quatre couleurs.*

1.6 Graphes d'intervalles

Dans ces graphes, les sommets du graphe sont des intervalles sur la droite réelle et on a une arête entre deux sommets lorsque deux intervalles ont une intersection commune.

THÉORÈME 9 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe d'intervalles. Alors,* G *ne contient aucun cycle d'ordre supérieur ou égal à* 4 *qui n'ait pas de corde.*

Ce théorème donne un critère pour montrer qu'un graphe n'est pas un graphe d'intervalle.

COROLLAIRE 5 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe. Si* G *a un cycle d'ordre supérieur ou égal à* 4 *qui n'a pas de corde, alors* G *n'est pas un graphe d'intervalles.*

Les graphes d'intervalles sont aussi très utilisés pour confectionner des horaires (voir exemple 2). Par exemple, pour une compagnie d'aviation, chaque vol correspond à un intervalle. Faire une assignation de pilotes pour couvrir tous les vols revient à faire un coloriage du graphe. Le nombre minimum de pilotes est alors le nombre chromatique du graphe.

1.7 Exercices

1. On considère le graphe G de la figure 1.8.

(a) Donner une marche de b à d qui n'est pas une chaîne.

(b) Donner une chaîne de b à d qui n'est pas un chemin.

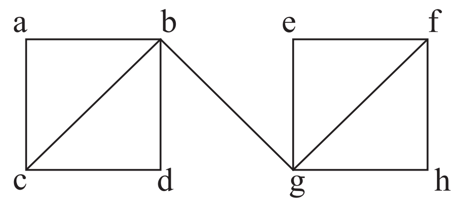


FIGURE 1.9 – Le graphe de l'exercice 2

(c) Donner un chemin de b à d.

(d) Donner une marche fermée de b à b qui n'est pas un circuit.

(e) Donner un circuit fermé de b à b qui n'est pas un cycle.

(f) Donner un cycle de b à b.

2. On considère le graphe G de la figure 1.9. Combien y a-t-il de chemins dans G de a à g ? Combien ont longueur 5 ?

3. Sept villes a, b, c, d, e, f, g sont reliées par des autoroutes comme suit : l'autoroute A22 va de a à b en passant par c ; l'autoroute A-33 va de c à d, puis passe à b pour se terminer à f ; l'autoroute A-44 va de d à a en passant par e ; l'autoroute A55 va de f à b en passant par g ; l'autoroute A-66 va de g à d.

(a) Dessiner un graphe modélisant cette situation, dont les sommets sont les villes.

(b) Lister tous les chemins de a à g.

(c) Quel est le plus petit nombre de tronçons d'autoroutes à fermer pour qu'on ne puisse plus voyager de c à g ?

(d) Est-il possible de partir de c et d'y retourner en ayant visité toutes les villes exactement une fois ?

(e) Est-il possible de partir de c et de visiter toutes les villes ?

(f) Est-il possible de partir de f et de parcourir tous les tronçons d'autoroutes exactement une fois ? Et de c ?

4. Soit $G = (V, E)$ un graphe sans boucle avec $|V| = v$ et $|E| = e$. Montrer que

$$2e \leq v^2 - v.$$

5. Soit $G = (V, E)$ un graphe. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur V par $a\mathcal{R}b$ si il existe un chemin de a à b dans V. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire les classes d'équivalence.

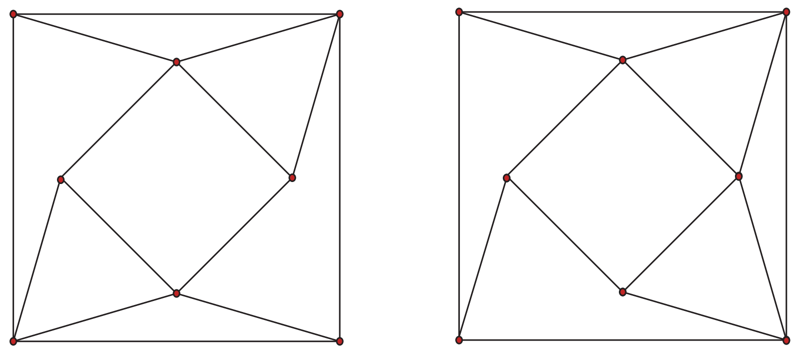


FIGURE 1.10 – Les graphes de l'exercice 9

6. Donner une chaîne eulérienne pour chacun des graphes des figures 1.8 et 1.9.

7. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Donner le nombre de sommets, V, sous chacune des conditions suivantes

(a) G a 9 arêtes et tous les sommets ont degré 3.

(b) G est régulier avec 15 arêtes. (Il y a plusieurs solutions.)

(c) G a 10 arêtes, deux sommets de degré 4, et tous les autres sommets de degré 3.

8. On considère un graphe sans boucle à six sommets, dans lequel chaque sommet est de degré 2. Combien y a-t-il de tels graphes non isomorphes ?

9. Les deux graphes de la figure 1.10 sont-ils isomorphes ?

10. (a) On considère le graphe de la figure 1.11. Trouver un circuit eulérien.

(b) Si on enlève l'arête $\{d, e\}$, trouver une chaîne eulérienne.

11. Est-il possible de relier 15 ordinateurs de telle sorte que chaque ordinateur soit relié avec exactement trois autres ?

12. Essayez de construire des graphes 3-réguliers avec 4, 5, 6, et 7 sommets. Qu'en déduisez-vous ?

13. On considère un groupe de n personnes dans lequel chaque personne a au moins un ami. Montrez qu'il y a au moins deux personnes qui ont le même nombre d'amis.
Suggestion Penser au principe des tiroirs : si on a $k + 1$ objets à mettre dans k tiroirs, alors on a au moins un tiroir qui contient deux objets.

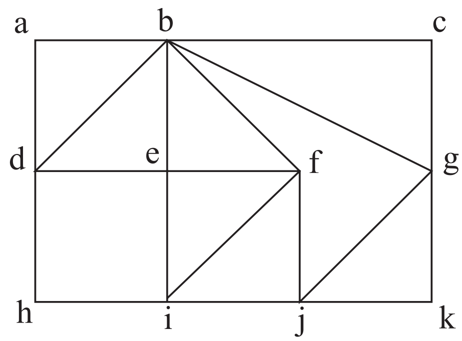


FIGURE 1.11 – Le graphe de l'exercice 10

14. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. On définit la *distance* entre deux sommets comme le nombre minimal d'arêtes d'un chemin reliant les deux sommets. Le *diamètre* du graphe est le minimum des distances entre deux sommets du graphe. Décrivez les graphes de diamètre 1.

15. Trois professeurs P_1, P_2 et P_3 doivent donner des cours à trois classes C_1, C_2 et C_3.

P_1 doit donner 2 heures de cours à C_1 et une heure à C_2.

P_2 doit donner une heure de cours à chacune des classes C_1, C_2 et C_3.

P_3 doit donner une heure de cours à C_2 et deux heures à C_3.

Quel est le nombre minimum de plages horaires dont on a besoin pour que ces cours se donnent ? (On essaie de placer le plus de cours possibles en parallèle.)
Suggestion Tracer un multigraphe reliant les professeurs aux cours qu'ils doivent donner. Colorier les arêtes de telle sorte que des cours incompatibles soient coloriés de couleurs différentes.

16. (a) Combien y a-t-il de sommets et d'arêtes dans les graphes complets bipartis $K_{4,7}$, $K_{7,11}$ et $K_{m,n}$.

(b) Si le graphe $K_{m,12}$ a 72 arêtes, trouver m.

17. Un graphe biparti peut-il avoir un cycle de longueur impaire ?

18. Les graphes de la figure 1.12 sont-ils planaires ?

19. Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire connexe qui détermine 53 régions. Si chaque région a au moins 5 arêtes, montrer que $|V| \geq 82$.

20. Donner le nombre chromatique du graphe $K_{1,n}$. Quel est son polynôme chromatique ?

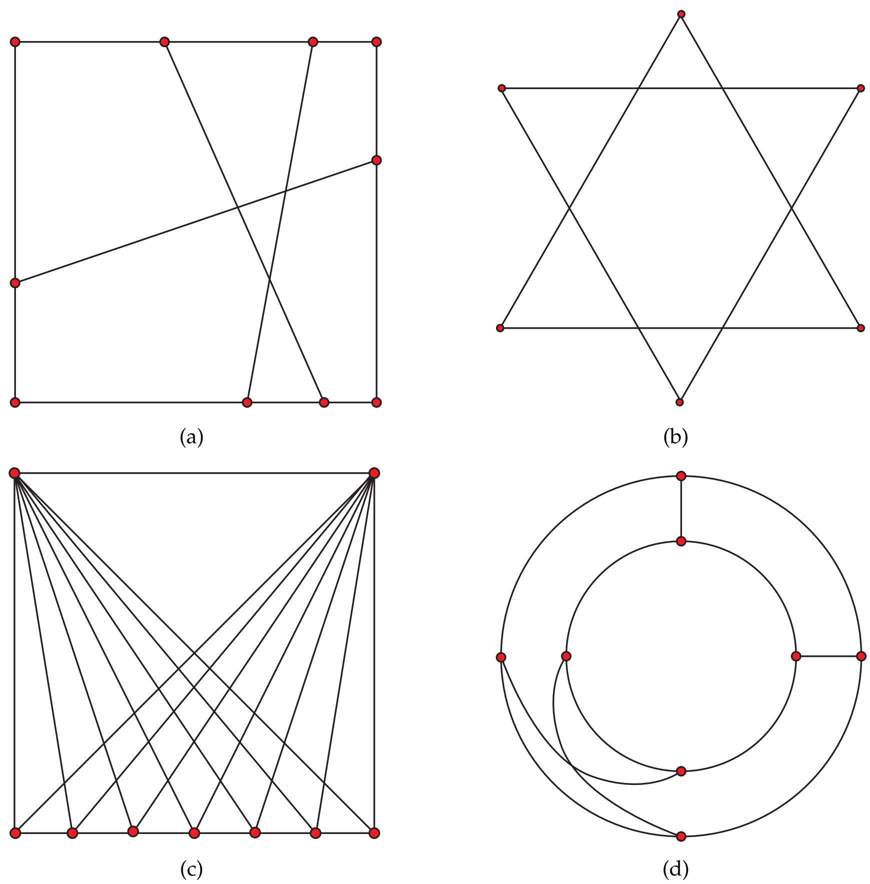


FIGURE 1.12 – Les graphes de l'exercice 1.7

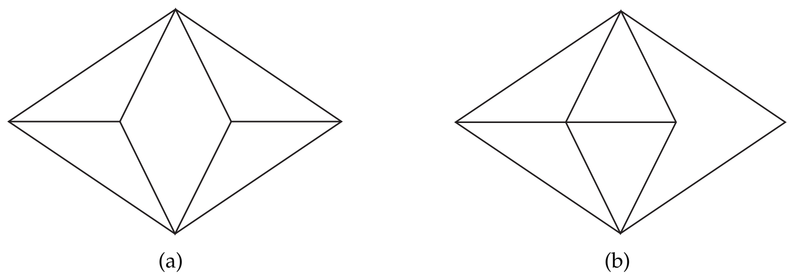


FIGURE 1.13 – Les graphes de l'exercice 1.7

21. (a) Une compagnie chimique doit entreposer des produits chimiques, numérotés de 1 à 7. La nature de ces produits fait que le produit i ne peut être entreposé avec le produit $i+1$, ni avec le produit $i+2$. Déterminer le nombre minimum de compartiments nécessaires pour stocker tous ces produits.

(b) Même question si, de plus, les produits des quatre paires suivantes ne peuvent être entreposés ensemble : 1 et 4, 2 et 5, 2 et 6, 3 et 6.

22. On considère le graphe $K_{2,3}$ où les sommets sont répartis dans les deux groupes $\{a, b\}$ et $\{x, y, z\}$.

(a) Combien y a-t-il de coloriages propres avec λ couleurs pour lesquels a et b sont de la même couleur ?

(b) Combien y a-t-il de coloriages propres avec λ couleurs pour lesquels a et b sont de couleur différente ?

(c) Quel est le polynôme chromatique de $K_{2,3}$? Quel est son nombre chromatique, $\chi(K_{2,3})$?

(d) Quel est le polynôme chromatique de $K_{2,n}$? Quel est son nombre chromatique, $\chi(K_{2,n})$?

23. Soit G_n le graphe obtenu du graphe complet K_n en enlevant une arête. Donner son polynôme chromatique et son nombre chromatique.

24. Soit G un graphe sans boucle ayant au moins une arête. Montrer que G est biparti si et seulement si $\chi(G) = 2$.

25. On considère les graphes de la figure 1.13.

(a) Sont-ils isomorphes ?

(b) Montrer, sans finaliser le calcul, que leurs polynômes chromatiques sont égaux.

(c) Donner leur polynôme chromatique.

26. On appelle W_n le graphe « roue » à $n + 1$ sommets : celui-ci est composé d'un cycle de longueur n avec sommets $x_1, \dots, x_n$ (la roue), auquel on ajoute un sommet a au milieu du cycle (le moyeu), et des arêtes entre a et chacun des sommets x_i (les rayons).

(a) Dessiner ce graphe et donner son nombre d'arêtes.

(b) Si C_n est le graphe correspondant à un cycle de longueur n, donner la relation entre $\chi(C_n)$ et $\chi(W_n)$.

(c) On considère une pièce de forme pentagonale. De combien de couleurs au minimum doit-on disposer si on veut peindre les murs adjacents de couleurs différentes et le plafond d'une autre couleur ?

Bibliographie

[1] Grimaldi, Ralph P. , *Discrete and Combinatorial Mathematics : An Applied Introduction* chapitre 11, Cinquième édition, Addison Wesley, 2004.

[2] Hertz, Alain, *L'agrapheur : intrigues policières saveur mathématique*, Presses Internationales Polytechnique, 2010, ISBN : 978-2-553-01543-4.