

Chapitre 1

Stabilité structurelle

1.1 Introduction

Nous avons introduit la norme d'une fonction en classe C^r que nous rappelons ici :

DÉFINITION 1 1. La norme d'une fonction $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ en classe C^s sur U est le nombre

$$\|v\|_{U,r} = \max_{X \in U} \max\{|v(X)|, |Dv(X)|, \dots, |D^r v(X)|\},$$

s'il existe

2. La distance de deux fonctions $v, w : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ en classe C^r sur U est le nombre

$$d_{U,r}(v, w) = \|v - w\|_{U,r}$$

s'il existe.

3. Ceci nous définit une topologie sur l'espace des fonctions $C^r(U, \mathbb{R}^n)$ que nous allons appeler la topologie C^r_U .

Cette norme nous permet de dire quand deux fonctions sont « proches ».

Nous avons aussi introduit la relation d'équivalence topologique orbitale. Nous pouvons donc définir la stabilité structurelle.

DÉFINITION 2 Un champ de vecteurs $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r est structurellement stable s'il existe $\epsilon > 0$ tel que tout $w \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$ satisfaisant $d_{U,r}(v, w) < \epsilon$ est topologiquement orbitalement équivalent à v .

En fait, si on permet à U d'être un ouvert, alors on aura très peu de champs structurellement stables, car on pourra faire apparaître des modifications par la frontière. Plusieurs approches permettent de pallier ce problème.

1. Contrôler le comportement au bord de U . C'est le cas du théorème d'Andronov-Pontrjagin qui regarde le comportement d'un champ de vecteurs v sur le disque \mathbb{D}_R de rayon R dans \mathbb{R}^2 . On suppose que le champ est défini sur un ouvert plus grand, et que le champ est transversal au cercle frontière $\partial\mathbb{D}_R$ et rentre dans le disque. Un autre champ w du même type sera proche si $d_{\mathbb{D}_R,r}(v, w)$ est petite.

2. On regarde des champs sur des variétés compactes comme la sphère \mathbb{S}^2 ou le tore \mathbb{T}^2 . C'est le cas du théorème de Peixoto.
3. On considère la topologie compacte-ouverte. Si l'on considère des champs sur U à valeurs dans \mathbb{R}^n , une base de voisinages de cette topologie est donnée par des ensembles de la forme

$$\{w \in C^r(U, \mathbb{R}^n) \mid w(X) \equiv v(X) \quad \text{si } X \notin K; d_{K,r}(v, w) < \epsilon\},$$

pour $K \subset U$ compact, $v \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$ et $\epsilon > 0$.

Les grandes questions du sujet sont les suivantes :

Question 1. Peut-on décrire les champs structurellement stables ?

Question 2. Les champs structurellement stables sont-ils denses ?

Des réponses assez complètes existent en dimension 2. La situation est beaucoup plus complexe en plus grande dimension.

1.2 Le théorème d'Andronov-Pontrjagin

Ce théorème considère des champs de vecteurs v sur le disque \mathbb{D}_R de rayon R dans \mathbb{R}^2 tels que le champ est transversal au cercle frontière $\partial\mathbb{D}_R$ et rentre dans le disque. Il caractérise les champs structurellement stables. De plus, les champs de vecteurs structurellement stables forment un ouvert dense.

THÉORÈME 1 (*Théorème de d'Andronov-Pontrjagin*) *On considère un champ de vecteurs v de classe C^r sur un ouvert U contenant la fermeture du disque \mathbb{D}_R de rayon R dans \mathbb{R}^2 tel que le champ est transversal au cercle frontière $\partial\mathbb{D}_R$ et rentre dans le disque. Le champ v est structurellement stable si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

- **(1)** *Le champ a un nombre fini de points singuliers qui sont hyperboliques.*
- **(2)** *Le champ a un nombre fini de solutions périodiques qui sont hyperboliques (et qui sont donc des cycles limites).*
- **(3)** *Il n'y a pas de connexion entre deux points de selle : aucune variété stable d'un point de selle ne coïncide avec la variété instable d'un autre point de selle ou du même point de selle.*

De plus, l'ensemble des champs structurellement stables est dense.

Ces conditions sont évidemment nécessaires et elles sont naturelles.

1.3 Le théorème de Peixoto pour des champs sur les surfaces compactes de dimension 2

Les mêmes conditions (1), (2) et (3) caractérisent les champs de vecteurs structurellement stables sur la sphère \mathbb{S}^2 .

THÉORÈME 2 *On considère un champ de vecteurs v de classe C^r sur la sphère S^2 . Le champ v est structurellement stable si et seulement si les conditions (1), (2) et (3) sont vérifiées. De plus, l'ensemble des champs structurellement stables est dense.*

Par contre, sur le tore, il existe des champs non structurellement stables qui satisfont à (1), (2) et (3).

EXEMPLE 1 *On a l'habitude de représenter le tore \mathbb{T}^2 comme le carré unité dans lequel on a identifié les côtés parallèles. Les coordonnées sur le carré représentent des angles. Nous allons donc les appeler ϕ_1 et ϕ_2 . Prenons sur le carré le champ*

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= a, \\ \dot{\phi}_2 &= b,\end{aligned}\tag{1.1}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors le champ n'a aucun point singulier. Donc, les conditions (1) et (3) sont vérifiées. Sans perte de généralité, supposons que $b \neq 0$. On a deux types de comportement très différents selon que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ou $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

- Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, alors toutes les trajectoires sont périodiques : on dit que le flot sur le tore est rationnel. Les solutions périodiques ne sont donc, ni en nombre fini, ni hyperboliques, et la condition (2) n'est pas vérifiée.
- Si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, aucune trajectoire n'est périodique, et toutes les trajectoires sont partout denses dans le tore : on dit que le flot sur le tore est irrationnel. Alors, la condition (2) est vérifiée. Un tel champ satisfait donc aux conditions (1), (2) et (3). Pourtant il n'est pas structurellement stable. En effet, on peut changer a ou b de manière minimale et déformer le champ en un flot rationnel.

Peixoto a montré qu'il faut une quatrième condition pour assurer la stabilité structurelle d'un champ sur le tore.

Pour énoncer cette quatrième condition, il nous faut introduire une définition.

DÉFINITION 3 *Soit v un champ de vecteurs de classe C^r sur un domaine U . Un point X de U est non errant si, pour tout voisinage V de X et tout $t > 0$, il existe $t' > t$ tel que $\phi^{t'}(X) \in V$.*

- EXEMPLE 2
1. Les points singuliers et les points des solutions périodiques sont non errants.
 2. Considérons un flot sur le tore, rationnel ou irrationnel. Alors, tous les points du tore sont non errants.
 3. Dans le système de Lorenz pour $\rho = 28$, les points de l'attracteur de Lorenz sont non errants.

THÉORÈME 3 (Théorème de Peixoto) *On considère un champ de vecteurs v de classe C^r sur une surface compacte de dimension 2 (ou sur une variété compacte de dimension 2). Le champ v est structurellement stable si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées :*

- (1) Le champ a un nombre fini de points singuliers qui sont hyperboliques.

- (2) Le champ a un nombre fini de cycles limites qui sont hyperboliques.
- (3) Il n'y a pas de connexion entre deux points de selle : aucune variété stable d'un point de selle ne coïncide avec la variété instable d'un autre point de selle ou du même point de selle.
- (4) Les seuls points non errants sont les points singuliers et les points des solutions périodiques.

De plus, l'ensemble des champs structurellement stables est dense. C'est un ouvert dense dans le cas où la surface est orientée.

REMARQUE 1 1. La condition (4) est toujours vérifiée pour un champ de vecteurs sur la sphère. C'est pourquoi elle n'apparaît pas dans le théorème 2.

2. Un exemple de variété de dimension 2 qui n'est pas une sous-variété de \mathbb{R}^3 est la bouteille de Klein.

1.4 Champs structurellement stables sur le tore

Revenons à la famille de champs (1.1) lorsque $a, b \in \mathbb{R}$. Aucun des champs de cette famille à deux paramètres n'est structurellement stable. Pourtant, le théorème de Peixoto affirme que les champs structurellement stables sur le tore forment un ouvert dense... Donc, chacun des champs de notre famille peut être approché par des champs structurellement stables. Quels peuvent être de tels champs ? Ce seront des champs qui auront un nombre fini (pair) de cycles limites hyperboliques, alternativement stables et instables. Les champs de vecteurs sur les tores sont suffisamment importants pour que nous prenions le temps de les étudier en détail ci-dessous.

1.5 Stabilité structurelle en dimension supérieure

Regardons nos conditions, une à une. Les conditions (1) et (2) sont très naturelles et vont demeurer nécessaires en dimension supérieure. Peut-on comprendre le pourquoi de la condition (3) en dimension 2 ? Les variétés stables et instables des points de selle sont de dimension 1. À cause du théorème d'existence et d'unicité des solutions, si elles ont un point d'intersection, alors elles se confondent. Donc, elles ne s'intersectent pas *transversalement*, et seules les intersections transversales sont structurellement stables.

Prenons maintenant le cas de la dimension 3. Dès qu'une variété stable intersecte une variété instable, alors la trajectoire de chaque point d'intersection est contenue dans la variété stable et dans la variété instable. Donc, la dimension de l'intersection des variétés stables et instables vaut au moins 1. Si la somme des dimensions des deux variétés vaut 3, alors cette intersection ne peut être transversale, donc structurellement stable. Mais si la somme des dimensions des deux variétés vaut 4, alors il est possible que les deux variétés s'intersectent transversalement.

Une deuxième différence avec la dimension 2 est que les cycles limites peuvent avoir un type « selle » avec une variété stable et une variété instable. La condition (3) est donc remplacée par la condition (3').

(3') Les variétés stables et instables des points singuliers et des orbites périodiques se coupent transversalement. Le théorème de Kupka-Smale affirme que les conditions (1), (2) et (3') sont nécessaires pour la stabilité.

THÉORÈME 4 (*Théorème de Kupka-Smale*) On considère un champ de vecteurs v de classe C^r sur une variété compacte de dimension supérieure ou égale à 3. Si le champ v est structurellement stable, alors les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- (1) Le champ a un nombre fini de points singuliers qui sont hyperboliques.
- (2) Le champ a un nombre fini de cycles limites qui sont hyperboliques.
- (3') Les variétés stables et instables des points singuliers et des orbites périodiques se coupent transversalement.

De plus, l'ensemble des champs vérifiant (1), (2) et (3') est dense.

On ne sera pas surpris que ces conditions ne soient pas suffisantes. En effet, notre variété de dimension 3 pourrait contenir un tore invariant avec un flot irrationnel. Pourquoi alors n'avoir pas ajouté la condition (4)? Effectivement, si on ajoute la condition (4), alors le champ est structurellement stable, et les conditions (1), (2), (3'), (4) sont suffisantes : c'est le théorème de Morse-Smale. Mais, elles ne sont plus nécessaires...

THÉORÈME 5 (*Théorème de Morse-Smale*) On considère un champ de vecteurs v de classe C^r sur une variété compacte de dimension supérieure ou égale à 3. Si les quatre conditions suivantes sont vérifiées, alors le champ v est structurellement stable.

- (1) Le champ a un nombre fini de points singuliers qui sont hyperboliques.
- (2) Le champ a un nombre fini de cycles limites qui sont hyperboliques.
- (3') Les variétés stables et instables des points singuliers et des orbites périodiques se coupent transversalement.
- (4) Les seuls points non errants sont les points singuliers et les points des solutions périodiques.

Mais l'ensemble des champs vérifiant (1), (2), (3') et (4) n'est pas dense.

On a de la chance : les conditions ne sont plus nécessaires : ceci signifie qu'on a plus de champs structurellement stables que ceux décrits par le théorème de Morse-Smale. Un exemple de tel système dynamique est donné par le fer à cheval de Smale. Peut-on encore espérer que les champs structurellement stables soient denses? La réponse est connue et elle est malheureusement négative.

1.6 Quelques idées sur les preuves

1.6.1 Le lemme de Sard

C'est l'outil le plus important pour faire les preuves. Commençons par le lemme de Sard en dimension 1.

THÉORÈME 6 (Lemme de Sard) *L'ensemble des valeurs critiques d'une fonction de classe C^1 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est de mesure zéro. Rappel : y est une valeur critique de f s'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $y = f(x)$ et $f'(x) = 0$.*

PREUVE Soit $\epsilon > 0$. Il faut montrer que l'ensemble des valeurs critiques est de mesure inférieure à ϵ . La fonction f' est uniformément continue. Il existe $\delta > 0$ tel que, si $|x_1 - x_2| < \delta$, alors $|f'(x_1) - f'(x_2)| < \epsilon$. Prenons n tel que $\frac{1}{n} < \delta$, et divisons $[0, 1]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$, appelés I_1, \dots, I_n . Soit J l'ensemble des indices i tels que I_i contient un point critique. Alors $|f'(x)| < \epsilon$ sur un tel intervalle I_i . Si $x_1, x_2 \in I_i$, alors $|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(x^*)(x_1 - x_2)| < \frac{\epsilon}{n}$. Alors $\text{mes}(I_i) < \frac{\epsilon}{n}$. Si L est l'ensemble des valeurs critiques, alors

$$\text{mes}(L) \leq \sum_{i \in J} \text{mes}(I_i) < \epsilon.$$

□

Regardons déjà une application.

THÉORÈME 7 *Soit $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ un champ vecteurs de classe C^1 (sous-entendu que v est défini sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}$, mais la taille de l'ouvert U n'est pas précisée). Alors v est structurellement stable si et seulement si v a un nombre fini de points singuliers hyperboliques et si $v(0), v(1) \neq 0$. De plus, l'ensemble des champs structurellement stables forme un ouvert dense. Cet ensemble est une réunion dénombrable d'ouverts simplement connexes : chaque composante connexe est caractérisée par un élément de $(n, s) \in \mathbb{N} \times \{+1, -1\}$, où n dénote le nombre de points singuliers et s le signe de $v(0)$.*

GRANDES IDÉES DE LA PREUVE

Les conditions énoncées sont nécessaires. En effet, si v a un nombre infini de points singuliers, alors il existe un point singulier qui est un point d'accumulation pour l'ensemble des points singuliers. En ce point, on a nécessairement $v'(0) = 0$: donc, 0 est une valeur critique de v . Comme l'ensemble des valeurs critiques est de mesure 0, il existe ϵ aussi proche de 0 que désiré qui n'est pas valeur critique de v . Alors $w(x) = v(x) - \epsilon$ n'a que des points singuliers hyperboliques, donc isolés. Donc, w n'est pas topologiquement équivalent à v .

Si v a des points singuliers isolés et un point singulier non hyperbolique en x_0 . Alors, $v(x_0) = a(x - x_0)^p + o(x^p)$. Si p est pair, on considère, comme précédemment, $w(x) = v(x) - \epsilon$ où ϵ est une valeur régulière de v . Cette perturbation change le nombre de points singuliers au voisinage de x_0 (ce nombre passe à 0 ou 2 selon que $a\epsilon > 0$ ou $a\epsilon < 0$), et w n'est pas topologiquement orbitalement équivalent à v . Si p est impair, il faut ajouter une

perturbation $\epsilon(x - x_0)h(x)$, où h est une fonction C^∞ qui prend la valeur 1 au voisinage de x_0 et 0 en dehors d'un voisinage de x_0 : dans la région de décroissance de $h(|x - x_0|)$, on doit avoir que $|v(x)| > \epsilon$. Alors, si $\epsilon < 0$, le champ $w(x) = v(x) + \epsilon(x - x_0)h(x)$ aura 3 points singuliers dans un voisinage de x_0 , et w n'est pas topologiquement orbitalement équivalent à v .

Si v des points singuliers hyperboliques et $v(0) = 0$. On considère encore $w_\epsilon(x) = v(x) - \epsilon$ où ϵ est une valeur régulière de v telle que $w(0), w(1) \neq 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $v(x) \neq 0$ dans $(0, \delta)$. Supposons que $v(\frac{\delta}{2}) > 0$. Alors, si ϵ_1 et ϵ_2 sont tels que $|\epsilon| < v(\frac{\delta}{2})$ et $w_{\epsilon_1}(0) < 0$ et $w_{\epsilon_2}(0) > 0$, on a que w_{ϵ_1} et w_{ϵ_2} ne sont pas topologiquement équivalents, et w_{ϵ_1} a un point singulier de plus que w_{ϵ_2} .

Un champ satisfaisant à ces conditions est structurellement stable. En effet, un tel champ v a un nombre fini de points singuliers $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, qui sont alternativement stables et instables. Tout champ w suffisamment proche (donc dans un voisinage ouvert) a le même nombre de points singuliers $0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n$ de même type (ici, il faut utiliser le théorème des fonctions implicites sur les espaces de Banach pour la fonction $F : [C^r([0, 1], \mathbb{R}) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $F(v, x) = v(x)$, mais nous ne rentrons pas dans ces subtilités). Pour construire une équivalence topologique h entre les deux champs, on pose $h(x_i) = y_i$, $h(0) = 0$, $h(1) = 1$. Soit z_i tel que $x_i < z_i < x_{i+1}$ et w_i tel que $y_i < w_i < y_{i+1}$. On pose $h(z_i) = w(i)$. On complète par le flot puisque tous les autres points de $[0, 1]$ sont sur la trajectoire pour v d'un des points $0, z_1, \dots, z_{n-1}, 1$.

L'ensemble des champs structurellement stables est dense. Soit v un champ de classe C^r sur $[0, 1]$. Alors, il existe w arbitrairement C^r proche de v tel que tous les points singuliers de w sont hyperboliques. En effet, un point singulier non hyperbolique correspond à un point critique de v . Par le lemme de Sard, l'ensemble des valeurs critiques de v est de mesure zéro. Donc, il existe ϵ arbitrairement petit tel que ϵ n'est pas une valeur critique de v . On prend $w = v - \epsilon$. Alors, $w(x) = 0$ si et seulement si $v(x) = \epsilon$ et on sait que les points satisfaisant à $v(x) = \epsilon$ sont tels que $v'(x) = w'(x) \neq 0$. On peut bien sûr choisir ϵ tel que $w(0), w(1) \neq 0$. \square

THÉORÈME 8 *Soit v un champ de vecteurs de classe C^r sur le cercle \mathbb{S}^1 . Alors v est structurellement stable si et seulement si v a un nombre fini pair de points singuliers hyperboliques. De plus, l'ensemble des champs structurellement stables forme un ouvert dense. Cet ensemble est une réunion dénombrable d'ouverts simplement connexes : chaque composante connexe est caractérisée par un élément de $\mathfrak{n} \in 2\mathbb{N}$, où $2n$ est le nombre de points singuliers.*

PREUVE Elle est complètement équivalente au cas précédent.

Le lemme de Sard se généralise au théorème de Sard en dimension supérieure, mais seulement pour des fonctions C^∞ .

DÉFINITION 4 Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 , où $m \leq n$. Un point critique de f est un point $X \in U$ tel que Df n'est pas de rang maximum égal à m . Alors $f(X)$ est une valeur critique de f . Un point de \mathbb{R}^m qui n'est pas une valeur critique de f est appelée valeur régulière de f .

REMARQUE 2 S'il n'existe aucun $X \in U$ tel que $Y = f(X)$, alors Y est une valeur régulière de f .

THÉORÈME 9 (Lemme de Sard) L'ensemble des valeurs critiques d'une fonction de classe $C^\infty f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est un ensemble de mesure zéro. Donc, l'ensemble des valeurs régulières est dense dans \mathbb{R}^m .

UN MOT SUR LA PREUVE La preuve se fait par induction sur n . Remarquons que si $n < m$, alors tous les points sont critiques, et l'ensemble des valeurs critiques de f est égal à l'image de f . Mais, la dimension de l'image est au plus n , et elle est donc de mesure zéro.

1.7 Le fer à cheval de Smale

Le fer à cheval de Smale est le plus simple d'une famille d'exemples de systèmes dynamiques dans lesquels on a des sous-ensembles invariants complexes avec une direction attractive et une direction répulsive. C'est un système discret. L'ensemble de départ est le carré unité $R = [0, 1]^2$. L'application $F : R \rightarrow \mathbb{R}^2$ comprime horizontalement par un facteur $\lambda < \frac{1}{2}$, et dilate dans la direction verticale par un facteur $\mu > 2$. La bande est ensuite pliée et posée en fer à cheval au dessus de la bande initiale (figure 1.1). Alors $F(R) \cap R$ consiste en deux bandes verticales V_1 (à gauche) et V_2 (à droite). Si on itère, alors, $F^2(R) \cap R$ est la réunion de 4 bandes verticales V_{11}, V_{21} à gauche, et V_{22} et V_{12} à droite (figure 1.2). Etc. Après n itérations on a que $F^n(R) \cap R$ est la réunion de $2n$ bandes verticales de largeur λ^n .

La grande question est de comprendre la structure de l'ensemble invariant maximal dans R sous les itérations positives et négatives de F que nous appelons Λ :

$$\Lambda = \{X \in R \mid F^i(X) \in R, -\infty < i < \infty\}.$$

On remarque alors que $V_i = F(H_i)$ où H_i est une bande horizontale de hauteur égale à $\frac{1}{\mu}$ (figure 1.3). Donc, $H_i = F^{-1}(V_i)$. De même, $F^{-1}(H_i)$ est la réunion de deux bandes horizontales de hauteur égale à $\frac{1}{\mu^2}$. On voit que l'ensemble invariant a une structure d'espace de Cantor. Chaque point de l'ensemble est l'intersection d'un nombre infini de bandes verticales emboîtées avec un nombre infini de bandes horizontales emboîtées. Chaque point est donc uniquement déterminé par la suite des indices déterminant les bandes verticales et horizontales auxquelles il appartient.

THÉORÈME 10 Il existe une bijection ϕ entre Λ et l'ensemble $\Sigma = \{f : \mathbb{Z} \rightarrow \{1, 2\}\}$. On définit $G : \Sigma \rightarrow \Sigma$ par $G(f)(i) = f(i+1)$, appelée application décalage sur deux

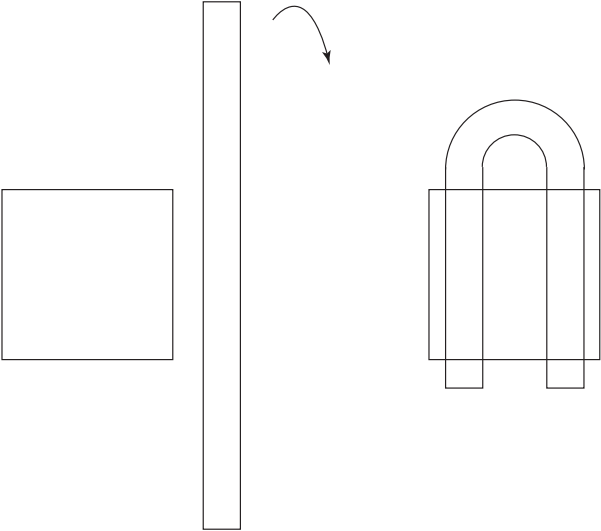


FIGURE 1.1 – Le fer à cheval de Smale.

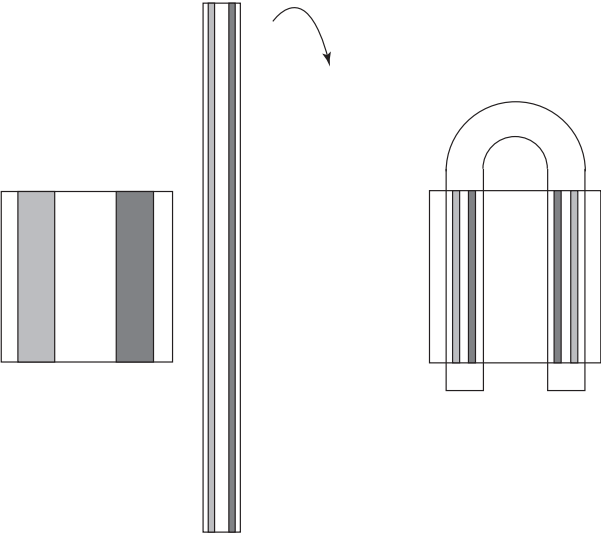


FIGURE 1.2 – La deuxième itération dans le fer à cheval de Smale.

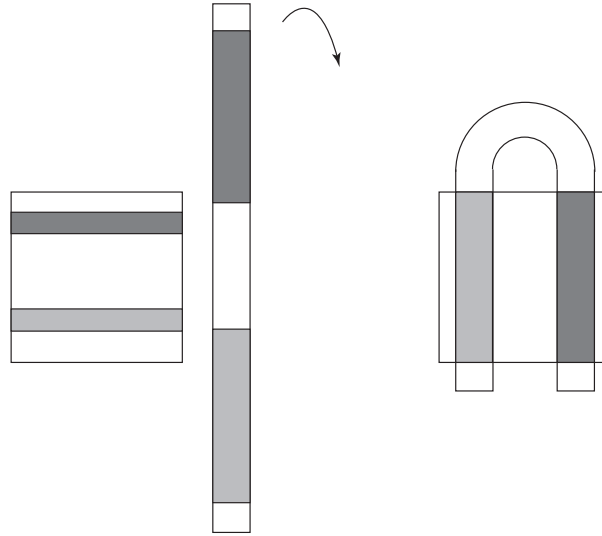


FIGURE 1.3 – Les bandes horizontales et verticales dans le fer à cheval de Smale.

symboles. On munit Σ d'une métrique qui en fait un espace topologique : si $f, g \in \Sigma$, alors

$$d(f, g) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^{|i|}},$$

où

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & f(i) = g(i), \\ 1, & f(i) \neq g(i). \end{cases}$$

Alors, ϕ est une équivalence topologique entre $F|_{\Lambda}$ et G .

PREUVE La fonction ϕ est définie comme suit

$$\phi(X) = \{a_i\}_{i=-\infty}^{\infty}, \quad f^i(X) \in H_{a_i}.$$

En effet, pour que l'orbite de x soit toute entière contenue dans R il faut que $F^i(x) \in H_1 \cup H_2$ pour tout i .

De par sa construction, il est clair que $\phi \circ F = G \circ \phi$. Il reste à voir que c'est un homéomorphisme.

Vérifions que ϕ est continue. Soit $\epsilon > 0$, il existe n tel que, si $f = \phi(X)$ et $g = \phi(Y)$, et si $f(i) = g(i)$ pour $|i| \leq n$, alors $d(\phi(X), \phi(Y)) < \epsilon$. Alors, X et Y appartiennent tous deux au petit rectangle déterminé par les conditions $F^i(X) \in H_{f(i)}$ pour $|i| \leq n$: celui-ci est de hauteur μ^{-n} et de largeur λ^n (voir figure 1.4). On choisit δ plus petit que la longueur du plus petit côté de ce rectangle.

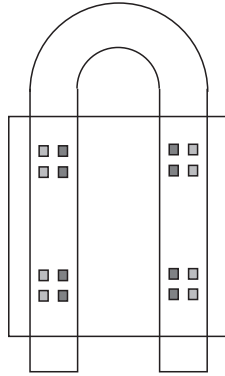


FIGURE 1.4 – Les rectangles déterminés par les conditions $F^i(X) \in H_{f(i)}$ pour $|i| \leq n$.

La fonction ϕ est injective car, si $X \neq Y$ alors, soit X et Y sont dans des bandes horizontales différentes, ou dans des bandes verticales différentes.

La fonction ϕ est surjective car chaque portion finie de la suite $\{a_{-n}, \dots, a_n\}$ définit un petit rectangle R_n . Les rectangles R_n sont emboîtés et ont donc une intersection non vide.

L'inverse de ϕ est aussi continue (exercice). \square

De plus, la dynamique de F sur l'ensemble Λ est chaotique. C'est l'occasion d'énumérer les propriétés qui sont considérées caractéristiques du chaos.

THÉORÈME 11 *L'application F a un ensemble de Cantor invariant Λ tel que*

1. Λ contient un ensemble dénombrable d'orbites périodiques de périodes arbitrairement longues.
2. Λ contient un ensemble non dénombrable d'orbites bornées non périodiques.
3. Λ contient une orbite dense.
4. La dynamique sur Λ est sensible aux conditions initiales.

PREUVE

1. Les suites périodiques correspondent aux orbites périodiques. Elles sont en nombre dénombrable. Chaque point d'une orbite périodique de période n est représentée une n suite périodique, et les suites correspondant aux points d'une même orbite sont obtenues par décalage l'une de l'autre.
2. Il y a un nombre non dénombrable de suites non périodiques.
3. On cherche $Y \in \Lambda$, tel que, pour tout $X \in \Lambda$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $|X - F^i(Y)| < \epsilon$. Deux points sont à une distance moins que ϵ si la partie centrale de leurs suites associées coïncident pour $|i| \leq n$ où $\sum_{|i| > n} \frac{1}{2^{|i|}} < \epsilon$. On prend une suite infinie qui comprend toutes les

suites finies d'éléments de $\{1, 2\}$. On commence par mettre les suites de 1 élément, puis toutes les suites de 2 éléments, puis toutes les suites de 3 éléments, etc. Du côté gauche on peut mettre ce qu'on veut. On cherche le point Y associé à cette suite. Il a la propriété voulue. Soit $X \in \Lambda$, $\epsilon > 0$ et le n associé et soit $\{a_i\}_{i=-n}^n$ la partie centrale de $\phi(X)$. Alors il existe $j \in \mathbb{Z}$ tel que, après décalage de la suite de Y de j cases, la partie centrale soit précisément $\{a_i\}_{i=-n}^n$.

4. Dire que deux points initiaux X et Y sont proches, c'est dire que les parties centrales de $\phi(X)$ et $\phi(Y)$ coïncident pour $|j| \leq n$, où $n \in \mathbb{N}$. Mais, cela ne dit rien sur le reste de la suite. Alors, si $k > n$, les orbites positives de $F^k(X)$ et $F^k(Y)$ n'ont plus rien en commun. Elles ne se rappellent plus que X et Y étaient proches au départ.

□

Le fer à cheval de Smale est structurellement stable !

THÉORÈME 12 *Tout difféomorphisme \tilde{F} suffisamment $C_{R,1}$ proche de F a un ensemble de Cantor invariant $\tilde{\Lambda}$ et $F|_{\tilde{\Lambda}}$ est topologiquement équivalent à $\tilde{F}|_{\tilde{\Lambda}}$.*

PREUVE Il est facile de se convaincre qu'on n'a pas du tout utilisé le fait que F était linéaire dans la construction de l'ensemble de Cantor et que la construction fonctionne encore pour une petite perturbation \tilde{F} . De plus, $F|_{\tilde{\Lambda}}$ et $\tilde{F}|_{\tilde{\Lambda}}$ sont tous deux topologiquement équivalents à $G|_{\Sigma}$. □

1.8 Champs de vecteurs sans points singuliers sur les tores

Les champs de vecteurs sans points singuliers sur les tores apparaissent de manière naturelle dans au moins deux contextes importants. Le premier est la bifurcation de Hopf pour les points fixes d'un difféomorphisme, et le second, les systèmes intégrables en mécanique classique.

1.8.1 La bifurcation de Hopf d'un difféomorphisme

Nous avons vu qu'un point fixe X_0 d'un difféomorphisme F est hyperbolique si les valeurs propres de $DF(X_0)$ ont module différent de 1. Il y a donc trois manières de violer minimalement cette condition :

1. Une valeur propre est égale à 1 : cela correspond à un point fixe multiple.
2. Une valeur propre égale à -1 : nous verrons que cela correspond au fait que le point fixe coïncide avec une orbite de période 2. La bifurcation correspondante lorsque la valeur propre traversera le cercle unité au point -1 sera le doublement de période. Ce phénomène ne peut se produire sur le plan, mais il pourrait se produire sur un ruban de Möbius.

3. Une paire de valeurs propres conjuguées $e^{\pm i\alpha}$ sur le cercle unité. La bifurcation lorsqu'une paire de valeurs propres traverse le disque unité en $e^{\pm i\alpha}$ est l'équivalent pour un difféomorphisme de la bifurcation de Hopf pour un point singulier d'un champ de vecteurs. Lorsque $\alpha \notin \{0, \pi, \pm \frac{2\pi}{3}, \pm \frac{\pi}{2}\}$, alors on assiste à la naissance d'une courbe fermée invariante sous le difféomorphisme. Mais, la dynamique sur cette courbe est beaucoup plus complexe que celle sur un cycle limite d'un champ de vecteurs.

Dans le cas où le difféomorphisme est l'application de premier retour de Poincaré au voisinage d'un cycle limite, en dimension $n \geq 3$, cette courbe invariante sous l'application de premier retour de Poincaré correspond à un tore invariant sous le flot. On veut donc étudier le flot sur ce tore.

1.8.2 Contexte d'apparition en mécanique classique

Les champs de vecteurs sans points singuliers sur les tores apparaissent de manière naturelle en mécanique classique dans les systèmes hamiltoniens. Rappelons qu'un système hamiltonien est un système de la forme

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{\partial H}{\partial Y}, \\ \dot{Y} &= -\frac{\partial H}{\partial X}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

où $H : U \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^r , pour $r \geq 2$. Il est facile de vérifier que $\dot{H} = 0$, et donc, que H est une *intégrale première* du système. Historiquement, au 19e siècle, les mathématiciens ont cherché à « intégrer » le système, en cherchant d'autres intégrales premières. Effectivement, si on connaissait $2n - 1$ intégrales premières en position assez générale, alors on connaîtrait les trajectoires comme intersection de $2n - 1$ hypersurfaces de niveau.

En fait, dans les systèmes hamiltoniens, il n'est pas nécessaire de connaître autant d'intégrales premières pour « intégrer » le système : Liouville a montré que n intégrales premières suffisent. Son résultat est résumé dans le théorème suivant.

THÉORÈME 13 (*théorème de Liouville sur les systèmes intégrables [1]*) *On se donne un système hamiltonien (1.2) qui a n intégrales premières $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$ en involution (voir définition ci-dessous). Considérons l'ensemble de niveau des fonctions F_i :*

$$M_\alpha = \{(X, Y) \mid F_i(X, Y) = \alpha_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Supposons que les n fonctions F_i sont indépendantes sur M_α , c'est-à-dire que leurs gradients ∇F_i sont linéairement indépendants en tout point de M_α . Alors,

1. M_α est une sous-variété qui est invariante sous le flot de (1.2).
2. Si M_α est compacte et connexe, alors M_α est difféomorphe à un tore \mathbb{T}_n de dimension n :

$$\mathbb{T}_n = \{(\phi_1, \dots, \phi_n) \pmod{1}\}.$$

3. Le flot de (1.2) définit un mouvement quasi-périodique, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \omega_1, \\ &\vdots \\ \dot{\phi}_n &= \omega_n, \end{aligned} \tag{1.3}$$

où les ω_i sont des constantes.

4. Les équations de Hamilton sont intégrables par quadratures (c'est-à-dire en prenant des primitives).

DÉFINITION 5 1. Le crochet de Poisson, (F_1, F_2) , de deux fonctions $F_i : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ est la dérivée de Lie de la fonction F_1 pour le champ vectoriel hamiltonien donné par F_2 . Si Φ_2^t est le flot de ce champ, alors

$$(F_1, F_2)(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F_1(\Phi_2^t(X)).$$

2. Deux fonctions F_1 et F_2 sont en involution si leur crochet de Poisson est identiquement nul : $(F_1, F_2) \equiv 0$.

REMARQUE 3 1. La définition de fonctions en involution est une notion subtile sur laquelle nous n'insisterons pas. Elle revient à dire que les flots des deux systèmes hamiltoniens définis avec F_1 et F_2 commutent.

2. On a le résultat suivant : une fonction F est une intégrale première de (1.2) si et seulement si $(H, F) \equiv 0$.

La plupart des systèmes intégrables de la mécanique classique tombent dans le cadre du théorème de Liouville.

EXEMPLE 3 Un exemple de système intégrable est la toupie de révolution dont l'extrémité inférieure est fixée. Sa position dans l'espace est déterminée par trois angles : l'angle autour de l'axe vertical (la toupie tourne autour de l'axe vertical), l'angle avec la verticale, et l'angle autour de l'axe de la toupie. C'est donc un système à 3 degrés de liberté. On a trois intégrales premières : l'énergie, le moment cinétique autour de l'axe vertical, et le moment cinétique autour de l'axe de la toupie. Le théorème de Liouville nous dit que le mouvement de la toupie est une superposition de trois oscillations périodiques des trois angles.

EXEMPLE 4 Regardons de nouveau le problème des n corps.

$$m_i \ddot{\vec{X}}_i = K \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{\vec{X}_j - \vec{X}_i}{|\vec{X}_j - \vec{X}_i|^3}, \tag{1.4}$$

qui est devenu, après avoir posé $m_i \dot{\vec{X}}_i = \vec{p}_i$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{X}}_i &= \frac{1}{m_i} \vec{p}_i, \\ \dot{\vec{p}}_i &= \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{\vec{X}_j - \vec{X}_i}{|\vec{X}_j - \vec{X}_i|^3}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Si on est dans le plan on a besoin de quatre coordonnées pour décrire l'état de chaque corps : deux coordonnées de position et deux coordonnées de vitesse. Donc, notre système est dans \mathbb{R}^{4n} . Si on est dans l'espace on a besoin de six coordonnées pour chaque corps, et notre système est dans \mathbb{R}^{6n} . Rappelons que le hamiltonien, H , représentant l'énergie, est donné par

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \langle \vec{p}_i, \vec{p}_i \rangle - \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\vec{X}_j - \vec{X}_i|}.$$

sur un espace de dimension $4n$ pour le problème plan et $6n$ pour le problème dans l'espace. La quantité de mouvement est le vecteur $\vec{p} = \vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_n$. Alors, $\dot{\vec{p}} = 0$. Donc, la quantité de mouvement est constante : chacune de ses coordonnées est une intégrale première pour le système. Le moment cinétique est le vecteur $\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{X}_i \times \vec{p}_i$. Ici, encore on peut montrer que $\dot{\vec{M}} = 0$. Pour le problème dans l'espace dans \mathbb{R}^{6n} , ceci donne sept intégrales premières : l'énergie H , les trois coordonnées de \vec{p} , et les trois coordonnées de \vec{M} . Mais, déjà pour $n = 3$ on est dans \mathbb{R}^{18} . On a moins que les neuf intégrales premières demandées dans le théorème de Liouville. Ce n'est pas mieux pour le problème plan dans \mathbb{R}^{4n} . En effet le vecteur \vec{M} est perpendiculaire au plan. Donc, il a une seule composante non nulle. On a donc quatre intégrales premières, alors que pour $n = 3$ on est dans \mathbb{R}^{12} .

La recherche au 19e siècle se concentrait sur la recherche d'intégrales premières. C'est Poincaré qui, vers 1885, a montré que tous les systèmes ne sont pas intégrables et, en particulier, que le système des n corps n'est pas intégrable pour $n \geq 3$. C'est la première révolution dans le problème des n corps.

La deuxième révolution dans le problème des n corps survient entre 1954 et 1965 et porte le nom de *théorie KAM* du nom des mathématiciens qui en sont à l'origine : Kolmogorov, Arnold et Moser. Ces mathématiciens se sont intéressés à ce qui se passe si un système hamiltonien à m degrés de liberté (soit dans \mathbb{R}^{2m}) est une petite perturbation d'un système intégrable. On peut imaginer que c'est le cas du système solaire. Si on modélise ce système comme un soleil fixe qui attire chaque planète, donc comme n problèmes de Kepler, alors on a un système intégrable. Comme les planètes sont petites, ajouter l'attraction des planètes sur le soleil et des planètes entre elles est une petite perturbation d'un système intégrable. Dans le système intégrable, on a des mouvements quasi-périodiques sur des tores invariants. Que deviennent les tores invariants dans le système perturbé ? Typiquement les fréquences ω_i varient

continûment d'un tore à l'autre. La théorie KAM affirme que la majeure partie des tores invariants (au sens de la mesure) persiste : ces tores sont seulement déformés continûment. Les tores qui persistent sont ceux pour lesquels les ω_i sont rationnellement indépendants, et pour lesquels les combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^m a_i \omega_i$, pour $a_i \in \mathbb{Z}$, ne décroissent pas trop vite en fonction de $\sum_{i=1}^n |a_i|$. Par contre, les tores pour lesquels les ω_i sont rationnellement dépendants sont détruits et une zone de chaos s'installe. Ces régions de chaos forment un ouvert dense. Le mouvement régulier (quasi-périodique) sur un ensemble de grande mesure est imbriqué avec le mouvement chaotique sur un ouvert dense. L'exemple 5 ci-dessous montre comment une telle imbrication prend place.

Le cas d'un système à deux degrés de liberté est particulier. En effet, les trajectoires sont situées dans les hypersurfaces de niveau du hamiltonien, qui sont de dimension 3. Les tores invariants de dimension 2 y forment des barrières infranchissables. Donc, les zones de chaos sont coincées entre les tores invariants non détruits. Par contre, dans le cas à $m > 2$ degrés de liberté, les hypersurfaces de niveau du hamiltonien sont de dimension $2m - 1$ et les tores invariants de dimension $m < 2m - 2$. Donc, les tores invariants ne forment plus une barrière et une trajectoire peut lentement dériver très loin de sa condition initiale. C'est ce qu'on appelle la *diffusion d'Arnold*.

1.8.3 Les champs de vecteurs structurellement stables sur le tore avec application de premier retour

Pour un champ sur le tore avec application de premier retour on peut prendre une section circulaire transverse C , sur laquelle on a une application de premier retour $P : C \rightarrow C$. Si on considère le cercle paramétré par un angle $x \in [0, 1]$, une telle application est donc donnée par une fonction $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, satisfaisant à

$$A(x + 1) = A(x) + 1.$$

On veut que A est un difféomorphisme du cercle et préserve l'orientation : il suffit pour cela que A soit strictement croissante. Écrivons

$$A(x) = x + a(x).$$

Alors $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est périodique de période 1 et, puisque A préserve l'orientation $a'(x) > -1$. On dira que A est un difféomorphisme du cercle préservant l'orientation. Poincaré a introduit un outil très puissant pour étudier ces difféomorphismes, soit le *nombre de rotation*.

DÉFINITION 6 *Le nombre de rotation de la fonction $P : C \rightarrow C$ est défini comme la limite*

$$\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a(y) + a(A(x)) + \dots + a(A^{k-1}(x))}{k}. \quad (1.6)$$

Il n'est pas clair a priori que ceci est une bonne définition. C'est garanti par le théorème suivant.

THÉORÈME 14 *Soit A un difféomorphisme du cercle préservant l'orientation.*

1. *La limite dans (1.6) existe et est indépendante du point x .*
2. *Le nombre de rotation μ est rationnel si et seulement si P a un point périodique.*

PREUVE

1. Appelons

$$a_k(x) = a(x) + a(A(x)) + \cdots + a(A^{k-1}(x)),$$

et remarquons que

$$A^k(x) = \underbrace{A \circ \cdots \circ A}_k(x) = x + a_k(x).$$

Montrons que si x_1 et x_2 sont des points quelconques de \mathbb{R} , alors

$$|a_k(x_1) - a_k(x_2)| < 1. \quad (1.7)$$

En effet, $A(x)$ est une fonction strictement croissante. Comme $a(x)$ est périodique, A envoie un intervalle de longueur 1 sur un intervalle de longueur 1. Donc, (1.7) est vérifiée si $|x_1 - x_2| < 1$. Mais, a_k est périodique de longueur 1. Donc, $|a_k(x_1) - a_k(x_2)| = |a_k(x_1) - a_k(x_3)|$ où x_3 diffère de x_2 par un entier et $|x_1 - x_3| < 1$.

Soit m_k un entier tel que

$$m_k \leq a_k(0) < m_k + 1.$$

Montrons que pour tout x et tout entier ℓ

$$\left| \frac{a_{k\ell}(x)}{k\ell} - \frac{m_k}{k} \right| < \frac{2}{k} \quad (1.8)$$

En effet, de par (1.7) on a

$$|a_k(x) - m_k| < 2.$$

Donc,

$$\left| \frac{a_k(x)}{k} - \frac{m_k}{k} \right| < \frac{2}{k}. \quad (1.9)$$

Or,

$$a_{k\ell}(x) = a_k(x) + a_k(A^k(x)) + \cdots + a_k(A^{k(\ell-1)}(x)),$$

uisque le quotient représente la moyenne arithmétique de ℓ quantités satisfaisant à (1.9). On en tire (1.8).

Soit $I_k = \left[\frac{m_k-2}{k}, \frac{m_k+2}{k} \right]$. On a montré que $\frac{a_{k\ell}(x)}{k\ell} \in I_k$ pour tout ℓ . Montrons que tous les intervalles I_k se coupent deux à deux. En effet, $\frac{a_{k\ell}(x)}{k\ell} \in I_k \cap I_\ell$. Alors, les intervalles I_k dont la longueur tend vers 0 ont une intersection non vide qui est le nombre de rotation μ . De par la construction, on voit bien que ce nombre est indépendant du nombre x initial.

2. Supposons que P ait un point périodique sur le cercle de période q . Cela signifie qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $A^q(x) = x + p$. Donc, $a_q(x) = p$ et $a_{q\ell}(x) = p\ell$ pour tout ℓ . Alors, $\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k(x)}{k} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, puisque la limite peut être calculée le long d'une sous-suite.

Réciproquement, supposons que $\mu = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Si pour tout x , $a_q(x) > p$, alors à cause de la périodicité de a_q , il existe $\epsilon > 0$ tel que $a_q(x) > p + \epsilon$. On en déduit que $\mu > \frac{p}{q}$. Contradiction. De même, si pour tout x $a_q(x) < p$. Donc, $a_q(x) - p$ change de signe, c'est-à-dire qu'il existe x^* tel que $a_q(x^*) = p$. Alors, x^* est un point périodique de P .

□

DÉFINITION 7 Soit A un difféomorphisme du cercle préservant l'orientation. Un cycle périodique est un ensemble de points de période q , $\{x, A(x), \dots, A^{q-1}(x)\}$, c'est à dire tels que $A^q(A^\ell(x)) = A^\ell(x) + p$. Remarquons que chacun des points du cycle est un point fixe de $A^q(x)$. Alors, le cycle est hyperbolique si $(A^q)'(x) \neq 1$.

REMARQUE 4 $(A^q)'(x) = \prod_{i=0}^{q-1} A'(A^i(x))$. Donc, si $(A^q)'(x) \neq 1$, alors

$$(A^q)'(A^\ell(x)) \neq 1$$

pour tout $\ell = 0, \dots, q - 1$. Donc, la notion de cycle hyperbolique est bien définie.

THÉORÈME 15 Soit A un difféomorphisme du cercle préservant l'orientation, de classe C^r , où $r \geq 2$. Alors A est structurellement stable si et seulement si A a un nombre fini de cycles périodiques hyperboliques. L'ensemble des fonctions structurellement s -tables est dense.

QUELQUES MOTS SUR LA PREUVE Ce théorème est avancé. Il est facile de se convaincre que si A a un nombre fini de cycles périodiques hyperboliques, alors A est structurellement stable. Voyons maintenant que si A un difféomorphisme du cercle préservant l'orientation de classe C^r , et si $\epsilon > 0$, alors il existe B tel que $d_{r,S^1}(A, B) < \epsilon$. Commençons par voir que si le nombre de rotation de A est irrationnel, alors on peut déformer A en B ayant un nombre de rotation rationnel. Ici, le résultat suit d'un théorème subtil, le théorème de Denjoy, que nous énonçons sans preuve.

THÉORÈME 16 (Théorème de Denjoy) Soit A un difféomorphisme du cercle préservant l'orientation, de classe C^r , où $r \geq 2$ et de nombre de rotation irrationnel μ . Alors, A est topologiquement équivalent à une rotation, c'est-à-dire qu'il existe un homéomorphisme $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $H(x + 1) = H(x) + 1$ et $H \circ A(x) = B \circ H(x) = H(x) + \mu$.

SUITE DE LA PREUVE DU THÉORÈME 15 On considère une perturbation $A_\eta(x) = A(x) + \eta$. À cause du fait que A est topologiquement équivalent à une rotation les itérées $A^n(x)$ d'un point x pour $n \in \mathbb{N}$ sont placées exactement comme les itérées $B^n(x)$ par rapport aux entiers de \mathbb{Z} . Une perturbation, si petite soit-elle, va changer l'ordre $A^n(x) < x + m$ pour $A_\eta^n(x) > x + m$, ou le contraire.

Le nombre de rotation aura donc changé. Pour une valeur η^* intermédiaire on aura $A_{\eta^*}(x) = x + m$, et A_{η^*} aura un nombre de rotation rationnel.

Nous voyons donc qu'il suffit de montrer que tout difféomorphisme $A(x) = x + a(x)$ de nombre de rotation rationnel $\mu = \frac{p}{q}$ peut être approché par des difféomorphismes de même nombre de rotation et dont tous les points périodiques sont hyperboliques. Puisque le nombre de rotation est rationnel, le difféomorphisme $A(x)$ a au moins une orbite périodique $x^*, A(x^*), \dots, A^q(x^*) = x^* + p$. Commençons par la rendre hyperbolique. Par la règle de dérivation en chaîne, on a que

$$(A^q)'(x^*) = \prod_{i=0}^{q-1} A'(A^i(x^*)).$$

Si ce produit est égal à 1, on va le rendre différent de 1 en ajoutant à $a(x)$ une petite perturbation $f(x) = \eta(x - x^*)h(x)$, où $h(x)$ est une fonction C^∞ de période 1 qui vaut 1 sur un petit voisinage de x^* et 0 ailleurs. Alors, si $A_\eta(x)$ est le difféomorphisme obtenu, on a

$$(A_\eta^q)'(x^*) = A_\eta'(x^*) \prod_{i=1}^{q-1} A'(A^i(x^*)) = (A^q)'(x^*) + \eta \prod_{i=1}^{q-1} A'(A^i(x^*)) \neq 1,$$

pour η aussi petit que désiré.

Maintenant, que nous avons une orbite périodique hyperbolique, nous allons rendre toutes les autres hyperboliques en utilisant le lemme de Sard. Pour cela, nous allons nous placer sur le cercle. Les points de l'orbite de x^* divisent le cercle en q segments. Prenons le segment adjacent à x^* dans le sens positif et appelons-le I . Soit x^* et x^{**} ses deux extrémités. Comme le nombre de rotation est $\frac{p}{q}$, toutes les orbites périodiques sont de période q . Alors, chaque orbite de période q , soit $y^*, A(y^*), \dots, A^{q-1}(y^*) = y^* + p$ a un point exactement dans le segment I . Soit V^* et V^{**} des petits voisinages de x^* et x^{**} qui ne contiennent aucun point périodique (ces voisinages existent parce que l'orbite de x^* est hyperbolique). Prenons une perturbation A_η de la forme $A_\eta(x) = A(x) + \eta h(x)$, où $h(x)$ est une fonction C^∞ qui vaut 1 sur $I \setminus (V^* \cup V^{**})$, et 0 au voisinage de x^* et x^{**} . Prenons J l'intervalle sur le cercle qui est l'image inverse de I par le difféomorphisme correspondant à $A^{-(q-1)}$. Si $y \in J$, alors $A_\eta^q(y) = A^q(y) + \eta$. L'ensemble des valeurs critiques de $A_\eta^q(x) - x$ sur J est de mesure nulle. Donc, il existe η aussi petit que désiré qui soit une valeur régulière de $A^q(x) - x$ sur J . Alors, $A_\eta^q(x)$ n'a que des points fixes hyperboliques. \square

EXEMPLE 5 On considère la famille à 2 paramètres de difféomorphismes du cercle préservant l'orientation donnée par

$$A_{\alpha, \epsilon}(x) = x + \alpha + \epsilon \sin(2\pi x),$$

pour $\alpha \in [0, 1]$ et $\epsilon \geq 0$. Remarquons que pour $\epsilon = 0$, alors ce difféomorphisme est une rotation de nombre de rotation α . On a donc un ensemble de pleine mesure de

nombre de rotation irrationnel. On veut maintenant voir ce qui se passe quand on augmente ϵ . Pour chaque nombre rationnel $\frac{p}{q}$, on va voir apparaître une région d'intérieur non vide dans laquelle le nombre de rotation est égal à $\frac{p}{q}$: cette région s'appelle une langue d'Arnold. Si on regarde ce qui se passe pour $\epsilon = \epsilon_0$ fixe assez petit, on aura une région de mesure assez proche de 1 sur lequel le nombre de rotation sera irrationnel et une région contenant un ouvert dense sur lequel le nombre de rotation est rationnel. Regardons quelques exemples.

Nombre de rotation égal à 0 Ceci se produit quand il existe x tel que $A(x) = x$. Alors, $\alpha = -\epsilon \sin(2\pi x)$, ce qui est possible dès que $\alpha \leq \epsilon$. La langue d'Arnold pour $\mu = 0$ est donc $0 \leq \alpha \leq \epsilon$.

Nombre de rotation égal à 1 Ceci se produit quand il existe x tel que $A(x) = x + 1$. Alors, $1 - \alpha = \epsilon \sin(2\pi x)$, ce qui est possible si $\epsilon > 1 - \alpha$. La langue d'Arnold pour $\mu = 1$ est donc $1 - \epsilon \leq \alpha \leq 1$. À partir de maintenant les calculs se corsent.

Nombre de rotation égal à $\frac{1}{2}$ Ceci se produit quand il existe x tel que $A^2(x) = x + 1$. Or

$$A^2(x) = x + 2\alpha + \epsilon \sin(2\pi x) + \epsilon \sin(2\pi(x + \alpha + \epsilon \sin(2\pi x))).$$

On pose $\alpha = \frac{1}{2} + \alpha'$, et on utilise la formule $\sin(a + \pi) = -\sin a$. L'équation $A^2(x) = x + 1$ devient

$$2\alpha' + \epsilon \sin(2\pi x) - \epsilon \sin(2\pi(x + \alpha' + \epsilon \sin(2\pi x))) = 0. \quad (1.10)$$

Si ϵ, α' sont petits, alors

$$\sin(2\pi(x + \alpha' + \epsilon \sin(2\pi x))) \simeq \sin(2\pi x) + \cos(2\pi x)(\alpha' + \epsilon \sin(2\pi x)).$$

En remplaçant dans (1.10), on obtient

$$\alpha'(2 - \epsilon \cos(2\pi x)) - \frac{\epsilon^2}{2} \sin(4\pi x) \simeq 0,$$

qui aura des solutions pour

$$-\frac{\epsilon^2}{4} + o(\epsilon^2) < \alpha' < \frac{\epsilon^2}{4} + o(\epsilon^2).$$

Nombre de rotation égal à $\frac{p}{q}$ la corne est bornée par deux courbes qui ont un contact d'ordre $q - 1$.

Pour $\epsilon = \epsilon_0 > 0$, le graphe de la fonction $\mu(\alpha, \epsilon_0)$ donnant le nombre de rotation en fonction de α est un escalier du diable.

Bibliographie

[1] V.I. Arnold, Méthodes mathématiques de la mécanique classique.