Détails de la preuve du théorème 1.17 pour la transformation N.

On a $v(t) = (\theta_0 + t\cos\alpha,\ \phi_0 + t\sin\alpha)$

$w(t) = (\theta_0 + t\cos\beta,\ \phi_0 + t\sin\beta)$

Alors
$$v_1(t) = F(v(t)) = R\Big(\cos(\theta_0 + t\cos\alpha)\cos(\phi_0 + t\sin\alpha),\ \sin(\theta_0 + t\cos\alpha)\cos(\phi_0 + t\sin\alpha),\ \sin(\phi_0 + t\sin\alpha)\Big) \quad (1)$$

et $w_1(t) = F(w(t))$ est obtenu en remplaçant α par β dans (1). L'expression de $v_1'(t)$ est longue à écrire : pour la raccourcir on pose $\theta = \theta_0 + t\cos\alpha$, $\phi = \phi_0 + t\sin\alpha$

Alors
$$v_1'(t) = R\Big(-\sin\theta\cos\phi\cos\alpha - \cos\theta\sin\phi\sin\alpha,\ \cos\theta\cos\phi\cos\alpha - \sin\theta\sin\phi\sin\alpha,\ \cos\phi\sin\alpha\Big)$$

Alors
$$v_1'(0) = R\Big(-\sin\theta_0\cos\phi_0\cos\alpha - \cos\theta_0\sin\phi_0\sin\alpha,\ \cos\theta_0\cos\phi_0\cos\alpha - \sin\theta_0\sin\phi_0\sin\alpha,\ \cos\phi_0\sin\alpha\Big) \quad (2)$$

et $w_1'(0)$ est obtenu en remplaçant α par β dans (2)
$$w_1'(0) = R\Big(-\sin\theta_0\cos\phi_0\cos\beta - \cos\theta_0\sin\phi_0\sin\beta,\ \cos\theta_0\cos\phi_0\cos\beta - \sin\theta_0\sin\phi_0\sin\beta,\ \cos\phi_0\sin\beta\Big).$$

$$\langle v_1'(0), w_1'(0)\rangle = R^2\Big[\cos\alpha\cos\beta\Big(\underbrace{\sin^2\theta_0\cos^2\phi_0 + \cos^2\theta_0\cos^2\phi_0}_{\cos^2\phi_0}$$

$$+ \sin\alpha\sin\beta\underbrace{\Big(\underbrace{\cos^2\theta_0\sin^2\phi_0 + \sin^2\theta_0\sin^2\phi_0}_{\sin^2\phi_0} + \cos^2\phi_0\Big)}_{1}$$

$$+ \cos\alpha\sin\beta\Big[\underbrace{\sin\theta_0\cos\theta_0\sin\phi_0\cos\phi_0 - \sin\theta_0\cos\theta_0\sin\phi_0\cos\phi_0}_{0}$$

$$+ \sin\alpha\cos\beta\,[0]$$

$$\langle v_1'(0), w_1'(0)\rangle = R^2\left[\cos\alpha\cos\beta\cos^2\phi_0 + \sin\alpha\sin\beta\right]$$ 2

Calculons maintenant $\langle v_2'(0), w_2'(0)\rangle$

$$v_2(t) = MF(v(t)) = R\left(\cos(\theta_0 + t\cos\alpha), \sin(\theta_0 + t\cos\alpha), \log\left(\tan\tfrac{1}{2}\left(\phi_0 + t\sin\alpha + \tfrac{\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$w_2(t) = R\left(\cos(\theta_0 + t\cos\beta), \sin(\theta_0 + t\cos\beta), \log\tan\tfrac{1}{2}\left(\phi_0 + t\sin\beta + \tfrac{\pi}{2}\right)\right)$$

Ici encore on pose $\theta = \theta_0 + t\cos\alpha$
$\phi = \phi_0 + t\sin\alpha$

$$v_2'(t) = R\left(-\sin\theta\cos\alpha, \cos\theta\cos\alpha, \frac{\sec^2\frac{1}{2}\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)}{\tan\frac{1}{2}\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)}\,\frac{\sin\alpha}{2}\right)$$

Simplifions cette expression qu'on a obtenu en utilisant $(\log u)' = \dfrac{u'}{u}$

et $(\tan u)' = \sec^2 u \; u'$ où $\sec u = \dfrac{1}{\cos u}$

On a $$\frac{\sec^2 u}{2\tan u} = \frac{\frac{1}{\cos^2 u}}{2\frac{\sin u}{\cos u}} = \frac{1}{2\sin u\cos u} = \frac{1}{\sin 2u}$$

Donc la 3e coordonnée de $v_2'(t)$ vaut

$$R\frac{\sin\alpha}{\sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)} = R\frac{\sin\alpha}{\cos\phi}$$

La dernière égalité suit en utilisant

$$\boxed{\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b}$$

ce qui donne $\sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\phi$.

Finalement

$$v_2'(t) = R\left(-\sin\theta\cos\alpha, \cos\theta\cos\alpha, \frac{\sin\alpha}{\cos\phi}\right)$$

Alors $v_2'(0) = R\left(-\sin\theta_0 \cos\alpha\,,\ \cos\theta_0 \cos\alpha,\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\phi_0}\right)^3$

et $w_2'(0)$ s'obtient de $v_2'(0)$ en remplaçant α par β :

$$w_2'(0) = R\left(-\sin\theta_0 \cos\beta,\ \cos\theta_0 \cos\beta\,,\ \frac{\sin\beta}{\cos\phi_0}\right)$$

Alors

$$\begin{aligned}
\langle v_2'(0), w_2'(0)\rangle &= R^2\Big[\cos\alpha\cos\beta\,(\underbrace{\sin^2\theta_0 + \cos^2\theta_0}_{1}) \\
&\qquad + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos^2\phi_0}\Big] \\
&= R^2\left[\cos\alpha\cos\beta + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos^2\phi_0}\right] \\
&= \frac{1}{\cos^2\phi_0}\,\langle v_1'(0), w_1'(0)\rangle
\end{aligned}$$

La constante $\lambda(\theta_0, \phi_0)$ du Lemme 1.18 est $\lambda(\theta_0, \phi_0) = \cos^2\phi_0$. Elle est positive sur le domaine de la carte de Mercator $\phi_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ qui ne comprend pas les pôles.