Bref corrigé de la série 10

1. $\min(m,n) = m \, \mathrm{sgn}(\mathrm{sous}(n,m))$
$+ n \, \mathrm{sgn}(\mathrm{sous}(m,n))$
$+ m \, \mathrm{cosgn}(\mathrm{sous}(m,n) + \mathrm{sous}(n,m))$

2. On a $g(n) = \mathrm{quot}(n,2) = \mathrm{quot}(n, s(s(0)))$

3. $R(m,n)$ est vraie ssi $m \neq 0$ et $\mathrm{rest}(n,m) = 0$

La fonction caractéristique de la relation $m \neq 0$ est
$$C_1(m) = \mathrm{cosgn}(m)$$
La fonction caractéristique de la relation $\mathrm{rest}(n,m)=0$ est
$$C_2(m,n) = \mathrm{sgn}(\mathrm{rest}(n,m))$$
$$= \mathrm{sgn} \circ \mathrm{rest} \circ (p_2^2, p_1^2)(m,n)$$

La fonction caractéristique de l'intersection des 2 relations est
$$C_R(m,n) = \mathrm{sgn}(C_1(m) + C_2(m,n))$$
Elle est récursive car somme de fonctions récursives.

$S(m,n)$ est vraie ssi $2 \mid m+n$

Donc
$$C_S(m,n) = C_R(2, m+n)$$
est récursive (composition de fonctions récursives)

4. $e_p(n)$ est le plus petit m tel que p^{m+1} ne divise pas n.

Donc $e_p(n) = \mu m\left[\operatorname{sgn}(n)\operatorname{cosgn}(\operatorname{rest}(n, p^{m+1})) = 0\right]$

Si $n = 0$ On a $\operatorname{sgn}(n)\operatorname{cosgn}(\operatorname{rest}(n, p^{m+1})) = 0$

Donc $e_p(n) = 0$.

Si $n \neq 0$, alors $\operatorname{sgn}(n)\operatorname{cosgn}(\operatorname{rest}(n, p^{m+1})) = 0$

ssi $\operatorname{rest}(n, p^{m+1}) \neq 0$.

5. $C_{A_1 \cup \dots \cup A_m} = C_{A_1} \cdot C_{A_2} \cdots \cdot C_{A_m}$.

En effet le produit est nul dès qu'une des fonctions C_{A_i} est nulle.
La fonction est récursive car produit de fonctions récursives.

$C_{A_1 \cap \dots \cap A_m} = \operatorname{sgn}(C_{A_1} + \dots + C_{A_m})$

En effet la somme est nulle si chacun des C_{A_i} est nulle. La fonction est récursive car composition de fonctions récursives.

6. $f(n) = S \circ S \circ z(n) \operatorname{cosgn}(\operatorname{sous}(n, 0))$

$+ \operatorname{cosgn}(\operatorname{eg}(n, 1))$

$+ \exp(n, n) \operatorname{cosgn}(\operatorname{pg}(n, s(0)))$