# Neuvième série d'exercices

1. On suppose $\nvdash_S A$. Soit $S^*$ l'extension de S obtenue en ajoutant $\sim A$ comme axiome. S était cohérent car il avait des modèles. Donc $S^*$ est cohérent car A est fermé. Donc $S^*$ a un modèle normal, M. On a donc $M \models \sim A$. Mais M est aussi un modèle de S et M est normal. Donc $M \models A$. Contradiction.

2. $$(\exists x_1)(\exists x_2)\left(\sim A_1^2(x_1, x_2) \wedge A_1^1(x_1) \wedge A_1^1(x_2) \wedge (\forall x_3)\left(A_1^1(x_3) \longrightarrow \left(A_1^2(x_1, x_3) \vee A_1^2(x_2, x_3)\right)\right)\right)$$

3. On remplace (G2) par

$$(G2')\ (\exists x_1)(\forall x_2)\ f_1^2(x_1, x_2) = x_2$$

On remplace (G3) par

$$(\exists x_1)(\forall x_2)\left(f_1^2(x_1, x_2) = x_2 \wedge f_1^2(f_1^1(x_2), x_2) = x_1\right)$$

6. $$(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\forall x_4)\left((x_4 \in x_3) \longleftrightarrow ((x_4 \in x_1) \wedge (x_4 \in x_2))\right)$$

# Serie 9

4\. i) C'est l'associativité qui est le plus difficile.

On veut $(x_1 x_2) x_3 = x_1(x_2 x_3)$

On appelle $x_1 x_2 = x_4$

$x_4 x_3 = x_5$

$x_2 x_3 = x_6$

$x_1 x_6 = x_7$

On veut $x_5 = x_7$.

Alors

$$\left(A_1^3(x_1, x_2, x_4) \wedge A_1^3(x_4, x_3, x_5) \wedge A_1^3(x_2, x_3, x_6) \wedge A_1^3(x_1, x_6, x_7)\right) \longrightarrow x_5 = x_7.$$

ou encore $A_1^3(x_1, x_2, x_4) \wedge A_1^3(x_4, x_3, x_5) \wedge A_1^3(x_2, x_3, x_6) \longrightarrow A_1^3(x_1, x_6, x_5)$

ii) élément neutre à gauche

$A_1^3(a_1, x_1, x_1)$

iii) inverse à gauche

$(\forall x_1)(\exists x_2) A_1^3(x_2, x_1, a_1)$

5\. On ~~peut~~ écrire une formule qui dit que pour tous $x_2$ et $x_3$ tels que $x_2 x_3 = x_1$, alors $x_2 = 1$ ou $x_3 = 1$. Par exemple

$$(\forall x_2)(\forall x_3)\ A_1^2(f_2^2(x_2, x_3), x_1) \longrightarrow (A_1^2(x_2, f_1^1(a_1)) \vee A_1^2(x_3, f_1^1(a_1)))$$