Corrigé du devoir.

1. $(\forall x_1) A_1^2(x_1, x_1) \to (\exists x_2)(\forall x_1) A_1^2(x_1, x_2)$.

~~Pour~~ Pour montrer que la formule n'est pas logiquement valide il suffit de trouver une interprétation et une valuation qui ne satisfait pas à la formule.

On prend $D_I = \mathbb{N}$ et $\overline{A_1^2}$: égalité.

$(\forall x_1) A_1^2(x_1, x_1)$ est vraie dans I, car pour toute valuation v et toute valuation v' 1-équivalente à v $\overline{A_1^2}(v'(x_1), v'(x_1))$ est vraie.

Aussi $(\exists x_2)(\forall x_1) A_1^2(x_1, x_2)$ est fausse dans I.

Car pour toute valuation v, on peut choisir v' 1-équivalente à v avec $v'(x_1) \neq v(x_2)$.

Alors $\overline{A_1^2}(\cancel{v'}(x_1), v'(x_2))$ est fausse.

Donc la formule est fausse dans I.

Montrons que $(\forall x_1) A_1^2(x_1, x_1) \to (\forall x_1)(\exists x_2) A_1^2(x_1, x$ est logiquement valide. Soit I une interprétation et v une valuation dans I.

Montrons que v satisfait à la formule.

Si v ne satisfait pas à $(\forall x_1) A_1^2(x_1, x_1)$ v satisfait à la formule. Sinon montrons que v satisfait à $(\forall x_1)(\exists x_2) A_1^2(x_1, x_2)$, c'est-à-dire que pour tout v' 1-équivalente à v il existe v'' 2-équivalente à v' qui satisfait à $A_1^2(x_1, x_2)$. On pose $v''(x_2) = v'(x_1)$.

Alors $\overline{A_1^2}(v''(x_1), v''(x_2))$ ssi $\overline{A_1^2}(v'(x_1), v'(x_1))$ qui est vraie car v' 1-équivalente à v satisfait à $\overline{A_1^2}(x_1, x_1)$

2. Montrons que $\{(\forall x_i)(A \to B), (\forall x_i)A\} \vdash_K (\forall x_i)B$.

(1)	$(\forall x_i)(A \to B)$	Hyp.
(2)	$(\forall x_i)(A \to B) \to (A \to B)$	(K4) ou (K5)
(3)	$A \to B$	MP (1) (2)
(4)	$(\forall x_i)A \to A$	(K4) ou (K5)
(5)	$(\forall x_i)A$	Hyp.
(6)	A	MP (4) (5).
(7)	B	MP (3) (6)
(8)	$(\forall x_i)B$	Gén.

On a utilisé une généralisation sur x_i qui n'est libre ni dans $(\forall x_i)(A \to B)$ ni dans $(\forall x_i)A$.
On a le droit d'utiliser le théorème de déduction 2 fois de suite. Ceci nous donne.

$$\{(\forall x_i)(A \to B)\} \vdash_K (\forall x_i)A \to (\forall x_i)B$$

Puis $\vdash_K (\forall x_i)(A \to B) \to ((\forall x_i)A \to (\forall x_i)B)$

3.

(1)	$(\forall x_i)A \to A$	(K4) ou (K5)
(2)	$(\forall x_i)\sim A \to \sim A$	(K4) ou (K5)
(3)	$\sim\sim(\forall x_i)\sim A \to (\forall x_i)\sim A$	tautologie.
(4)	$\sim\sim(\forall x_i)\sim A \to \sim A$	SH (3)(2)
(5)	$(\sim\sim(\forall x_i)\sim A \to \sim A) \to (A \to \sim(\forall x_i)\sim A)$	(K3)
(6)	$A \to \sim(\forall x_i)\sim A$	MP (4) 5)
(7)	$(\forall x_i)A \to \underbrace{\sim(\forall x_i)\sim A}_{(\exists x_i)}$	SH (1) (6)

4. (1) $(\forall x_1)(\forall x_2)\, A_1^2(x_1, x_2)$ Hyp.

(2) $(\forall x_1)(\forall x_2)\, A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_2)\, A_1^2(x_1, x_2)$ (K5)

(3) $(\forall x_2)\, A_1^2(x_1, x_2)$ MP (1)(2)

(4) $(\forall x_2)\, A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_3)\, A_1^2(x_1, x_3)$ par le prop.

(5) $(\forall x_3)\, A_1^2(x_1, x_3)$ MP(3)(4)

(6) $(\forall x_1)(\forall x_3)\, A_1^2(x_1, x_3)$ Gén

(7) $(\forall x_1)(\forall x_3)\, A_1^2(x_1, x_3) \rightarrow (\forall x_3)\, A_1^2(x_2, x_3)$ (K5)

(8) $(\forall x_3)\, A_1^2(x_2, x_3)$ MP (6)(7)

(9) $(\forall x_2)(\forall x_3)\, A_1^2(x_2, x_3)$ Gén

5. (1) $(\forall x_1)(\forall x_2)\, A_1^2(x_1, x_2)$ Hyp.

(2) $(\forall x_1)(\forall x_2)\, A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_2)\, A_1^2(x_1, x_2)$ (K5)

(3) $(\forall x_2)\, A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^2(x_1, x_1)$ (K5)

(4) $(\forall x_2)\, A_1^2(x_1, x_2)$ (MP)(1)(2)

(5) $A_1^2(x_1, x_1)$ MP (3)(4)

(6) $(\forall x_1)\, A_1^2(x_1, x_1)$ Gén.