Corrigé 3e série d'exercices

1. (a) On a $\vdash_L (((\sim p_1) \to (\sim p_2)) \to (p_2 \to p_1))$ (L3)

alors en particulier

$\{(p_1 \to p_2)\} \vdash_L (((\sim p_1) \to (\sim p_2)) \to (p_2 \to p_1))$

Donc par le théorème de déduction

$\vdash_L ((p_1 \to p_2) \to (((\sim p_1) \to (\sim p_2)) \to (p_2 \to p_1)))$

(b) A_1 $(p_2 \to (p_1 \to p_2))$ (L1)

A_2 $((p_2 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to (p_2 \to (p_1 \to p_2))))$ (L1)

A_3 $(p_1 \to (p_2 \to (p_1 \to p_2)))$ MP

2. (a) On a vu que $((\sim B) \to (B \to A))$. En remplaçant B par A on a $((\sim A) \to (A \to B))$

Alors $\{\sim A\} \vdash_L (A \to B)$ par la réciproque du théorème de déduction.

(b) A_1 $\{\sim\sim A\}$ hypothèse

A_2 $(\sim\sim A) \to ((\sim\sim\sim\sim A) \to (\sim\sim A))$ (L1)

A_3 $(\sim\sim\sim\sim A) \to (\sim\sim A)$ MP avec A_1 et A_2

A_4 $((\sim\sim\sim\sim A) \to (\sim\sim A)) \to (\sim A \to \sim\sim\sim A)$ (L3)

A_5 $(\sim A) \to (\sim\sim\sim A)$ MP avec A_3 et A_4

A_6 $((\sim A) \to (\sim\sim\sim A)) \to ((\sim\sim A) \to A))$ (L3)

A_7 $(\sim\sim A) \to A$ MP avec A_5 et A_6

A_8 A MP avec A_1 et A_8.

3. (a) Par 2 (b) on sait que $\vdash_L (\sim(\sim A)) \to (\sim A)$ (et le thm de déduction)

A_1 $(\sim\sim \sim A)) \to (\sim A)$ exercice 2(b)

A_2 $(\sim\sim\sim A \to A) \to (A \to \sim\sim A)$ (L3)

A_3 $A \to \sim\sim A$ MP de A_1 et A_3

3. (b) On va utiliser le théorème de déduction et montrer que $\{B \to A\} \vdash ((\sim A) \to (\sim B))$

A_1 $B \to A$ Hypothèse.

A_2 $(\sim\sim B) \to B$ vient du numéro 2(b)

A_3 $(\sim\sim B) \to A$ SH avec A_2 et A_1

A_4 $A \to (\sim\sim A)$ numéro 3(a)

A_5 $(\sim\sim B) \to (\sim\sim A)$ SH avec A_3 et A_4.

A_6 $((\sim\sim B) \to (\sim\sim A)) \to ((\sim A) \to (\sim B))$ (L3)

A_7 $(\sim A) \to (\sim B)$ MP avec A_5 et A_6.

(c) On utilisera le théorème de déduction et on va montrer que $\{\sim(A \to B)\} \vdash (B \to A)$

A_1 $\sim(A \to B)$ Hypothèse

A_2 $(B \to (A \to B)) \to (\sim(A \to B) \to (\sim B))$ par 3(b)

A_3 $B \to (A \to B)$ (L1)

A_4 $(\sim(A \to B)) \to (\sim B)$ MP avec A_2 et A_3

A_5 $(\sim B)$ MP avec A_1 et A_4

A_6 $(\sim B) \to (B \to A)$ proposition vue au cours 3.8

A_7 $(B \to A)$ MP avec A_5 et A_6.

4. On suppose (L3) valide. On utilise le théorème de déduction pour montrer que (L3') est valide c'est-à-dire que

$\{(\sim A) \to (\sim B)\} \vdash_L (((\sim A) \to B) \to A)$

A_1 $(\sim A) \to (\sim B)$ Hypothèse

A_2 $(\sim A) \to (\sim B) \to (B \to A)$ (L3)

A_3 $(B \to A)$ MP avec A_1 et A_2

Si on utilise le théorème de déduction une 2e fois il suffit de montrer que

$\{((\sim A) \to (\sim B)), ((\sim A) \to B)\} \vdash_L A$

A_4 $(\sim A) \to B$ Hypothèse.

A_5 $(\sim A) \to A$ MP avec A_4 et A_3

A_6 $((\sim A) \to A) \to A$ Proposition 3.8 vue au cours.

A_7 A MP de A_5 et A_6

On a montré que (L3') est valide.

Réciproquement, on suppose (L3') valide et on construit une preuve de (L3) sans utiliser (L3). On a le droit d'utiliser le théorème de déduction car il n'a pas utilisé (L3). On va montrer par le théorème de déduction que

$$\{((\sim A) \to (\sim B)), B\} \vdash_L A.$$

A_1 $((\sim A) \to (\sim B)) \to (((\sim A) \to B) \to A)$ (L3')

A_2 $(\sim A) \to (\sim B)$ Hypothèse.

A_3 $((\sim A) \to B) \to A$ MP de A_1 et A_2

A_4 B Hypothèse

A_5 $B \to ((\sim A) \to B)$ (L1)

A_6 $(\sim A) \to B$ MP avec A_4 et A_5

A_7 A MP avec A_3 et A_6

Soit $\mathcal{C}$ une formule bf qui est un théorème de L chaque fois qu'on a utilisé (L3) on peut ~~remplacer~~ ajouter une suite de formules qui constitue une preuve de l'instance de (L3) utilisée dans L'. Ceci donne une preuve de la formule $\mathcal{C}$ dans L'. La réciproque se fait de la même manière.