Série 4

1. Pour l'axiome (L1) $p \to (q \to p)$ est une tautologie en utilisant les tables de vérité. Alors $\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$ est une tautologie car obtenue de la formule précédente en remplaçant p par $\mathcal{A}$ et q par $\mathcal{B}$. Ceci suit du thm 2.3 (2) des notes.

2. Si $\mathcal{A}$ est un théorème de L, alors toute preuve dans L^* utilisant $\mathcal{A}$ comme axiome peut être transformée en une preuve dans L en ajoutant la preuve de $\mathcal{A}$ dans L. Donc, tout théorème de L^* est un théorème de L. Si $\mathcal{A}$ n'est pas un théorème de L, il est un théorème de L^* puisqu'il est axiome de L^*. Donc L^* a plus de théorèmes que L.

3. Si $\mathcal{B}$ est une contradiction, alors $\sim\mathcal{B}$ est une tautologie. Par le théorème d'adéquation $\vdash_L \sim\mathcal{B}$. Si $\mathcal{B}$ était un théorème d'une extension cohérente L^* de L on aurait $\vdash_{L^*} \mathcal{B}$ et $\vdash_L \sim\mathcal{B}$, ce qui entraîne $\vdash_{L^*} \sim\mathcal{B}$. Contradiction

4. On utilise 3 en remplaçant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ par des formules pour lesquelles
$$((\sim\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \sim\mathcal{B}))$$

est une contradiction.

$$(\sim p \to q) \to (p \to \sim q)$$

est fausse pour p et q qui prennent la valeur V.

On doit donc remplacer p et q par deux tautologies. Par exemple A: $(\mathcal{C} \to \mathcal{C})$ et q: $(\mathcal{D} \to \mathcal{D})$

Le schéma d'axiomes comprend l'axiome

$$(\sim(\mathcal{C} \to \mathcal{C}) \to (\mathcal{D} \to \mathcal{D})) \to ((\mathcal{C} \to \mathcal{C}) \to \sim(\mathcal{D} \to \mathcal{D}))$$

qui est une contradiction. Par l'exercice 3, L* est incohérente

5. A est un théorème. Par le théorème d'intégrité (thm 3,11) c'est une tautologie.
Par le thm 2.3 (2) des notes B est une tautologie puisque obtenue en remplaçant les variables propositionnelles par des formules Lf. Par le théorème d'adéquation, B est un théorème de $\mathcal{L}$.