MAT 3060

Sixième série d'exercices

1. Montrer que les formules bf suivantes de $\mathcal{L}$ sont logiquement valides.

(a) $((\exists x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2) \to (\forall x_2)(\exists x_1)A_1^2(x_1, x_2))$;

(b) $(\forall x_1)A_1^1(x_1) \to ((\forall x_1)A_1^2(x_1) \to (\forall x_2)A_1^1(x_2))$;

(c) $(\forall x_1)(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to ((\forall x_1)\mathcal{A} \to (\forall x_1)\mathcal{B})$ pour toutes formules bf $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$;

(d) $((\forall x_1)(\forall x_2)\mathcal{A} \to (\forall x_2)(\forall x_1)\mathcal{A})$, pour toute formule bf $\mathcal{A}$.

2. Montrer qu'aucune des formules bf suivantes de $\mathcal{L}$ n'est logiquement valide.

(a) $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \to (\exists x_2)(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2)$;

(b) $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, x_1))$;

(c) $(\forall x_1)((\sim A_1^1(x_1)) \to (\sim A_1^1(a_1)))$;

(d) $((\forall x_1)A_1^2(x_1, x_1) \to (\exists x_2)(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2))$.

3. Écrire une preuve dans $K_{\mathcal{L}}$ de la formule

$$(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \to A_1^1(x_1)).$$

4. Montrer que les formules suivantes sont des théorèmes de $K_{\mathcal{L}}$.

(a) $(\exists x_i)(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to ((\forall x_i)\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ si x_i n'est pas libre dans $\mathcal{B}$;

(b) $(\sim(\forall x_i)\mathcal{A} \to (\exists x_i) \sim\mathcal{A})$.

Solutionnaire
Sixième série

1. (a) Soit I une interprétation de $\mathcal{L}$ et v une valuation dans I. Si v satisfait à $(\forall x_2)(\exists x_1) A_1^2(x_1, x_2)$ alors v satisfait à $(\exists x_1)(\forall x_2) A_1^2(x_1,x_2) \rightarrow (\forall x_2)(\exists x_1) A_1^2(x_1,x_2)$

Si v ne satisfait pas à $(\forall x_2)(\exists x_1) A_1^2(x_1,x_2)$, alors on doit montrer que v ne satisfait pas à $(\exists x_1)(\forall x_2) A_1^2(x_1,x_2)$.

On a donc par hypothèse :

Hyp. Il existe v' 2-équivalente à v, telle que pour toute valuation w' 1-équivalente à v', w' ne satisfait pas à $A_1^2(x_1, x_2)$

On a donc $\begin{cases} w'(x_1) \text{ quelconque} \\ w'(x_2) = v'(x_2) \end{cases}$

et $v'(x_1) = v(x_1)$.

On doit montrer que pour toute valuation v'' 1-équivalente à v, il existe une valuation w'' 2-équivalente à v'' telle que w'' ne satisfait pas à $A_1^2(x_1, x_2)$

On va prendre pour w'' l'un des w' ci-dessus.

On prend donc $\begin{cases} w''(x_2) = v'(x_2) \\ w''(x_1) = v''(x_1) \end{cases}$

w'' a bien la forme des w' ci-dessus et ne satisfait donc pas à $A_1^2(x_1, x_2)$

(b) Soit I une interprétation et v une valuation dans I. Si v satisfait à $((\forall x_1)A_1^2(x_1) \to (\forall x_2)A_1^1(x_1))$ alors v satisfait à la formule.
Si v ne satisfait pas à $(\forall x_1)A_1^2(x_1) \to (\forall x_2)A_1^1(x_2)$ c'est-à-dire que v ne satisfait pas à $(\forall x_2)A_1^1(x_2)$ et v satisfait à $(\forall x_1)A_1^2(x_1)$, alors on doit montrer que v ne satisfait pas à $(\forall x_1)A(x_1)$

v ne satisfait pas à $(\forall x_2)A_1^1(x_2)$ si $\exists v'$ 2-équivalente à v telle que v' ne satisfait pas à $A_1^1(x_2)$.
Prenons w définie par $w(x_1) = v'(x_2)$.
et $w(x_2) = v(x_2)$

Alors w est 1-équivalente à v et w ne satisfait pas à $A_1^1(x_1)$.
En effet on a que $\bar{A}_1^1(v'(x_2))$ est fausse dans I
Comme $v'(x_2) = w(x_1)$, alors $\bar{A}_1^1(w(x_1))$ est fausse

(c) Soit v une valuation. Si v ne satisfait pas à $(\forall x_1)(A \to B)$, OK. Sinon, toute valuation v' 1-équiv. à v satisfait à $A \to B$.
Montrons que v satisfait à $(\forall x_1) A \to (\forall x_1) B$.
Si v ne satisfait pas à $(\forall x_1) A$, v satisfait à la formule. Sinon tout v' 1-équiv. à v satisfait à A. Mais ce v' satisfait aussi à $A \to B$. Donc v' 1-équiv à v satisfait à B. Donc v satisfait à $(\forall x_1) B$.

d) Si v satisfait à $(\forall x_1)(\forall x_2) A$, alors tout v' 1-équiv à v satisfait à $(\forall x_2) A$. Donc tout v'' 2-équiv à v' satisfait à A.
Montrons que v satisfait alors à $(\forall x_2)(\forall x_1) A$ c'est-à-dire que pour tout w' 2-équiv à v et tout w'' 1-équiv à w', alors w'' satisfait à A.

Posons
$$v'(x_1) = w''(x_1)$$
$$v'(x_j) = v(x_j) \quad j \geq 2$$
et
$$\begin{cases} v''(x_2) = w''(x_2) = w'(x_2) \\ v''(x_1) = v'(x_1) = w''(x_1) \\ v''(x_j) = v(x_j) \quad j \geq 2. \\ \qquad\qquad = w(x_j) \end{cases}$$

On remarque que v' 1-équiv à v et v'' 2-équiv à v'.
De plus $v'' = w''$. Comme v'' satisfait à A, alors w'' satisfait à A.

2. Il suffit de montrer qu'il existe une interprétation et une valuation dans cette interprétation qui ne satisfait pas à la formule

(a) On prend $I = \mathbb{N}$ et

$\overline{A}_1^2(x_1, x_2)$: " $x_1 < x_2$ "

Il est facile de voir que $(\forall x_1)(\exists x_2)\, A_1^2(x_1, x_2)$ est vraie dans I mais pas $(\exists x_2)(\forall x_1)\, A_1^2(x_1, x_2)$

(b) La même interprétation fonctionne ici.

2. Il suffit de montrer qu'il existe une interprétation et une valuation que ne satisfait pas à la formule.

(a) si on prend $I = \mathbb{N}$ et

$\bar{A}_1^2(x_1, x_2)$: $x < y$.

il est facile de voir que $(\forall x_1)(\exists x_2)\bar{A}_1^2(x_1, x_2)$ est vrai dans I mais pas $(\exists x_2)(\forall x_1)\bar{A}_1^2(x_1, x_2)$

(b) La même interprétation fonctionne ici.

3. $A_1^1(x_1) \to A_1^1(x_1)$ tautologie.

$(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \to A_1^1(x_1))$ généralisation

4. (a) A été fait au cours

(b) $\sim\sim(\forall x_i)\mathcal{A} \to (\forall x_i)\mathcal{A}$ tautologie.

$\sim\sim(\forall x_i)\mathcal{A} \leftrightarrow \sim\sim(\forall x_i)\sim\sim\mathcal{A}$ on remplace $\mathcal{A}$ par $\sim\sim\mathcal{A}$ démontrablement équivalent

$\sim(\exists x_i)\sim\mathcal{A} \to \sim\sim(\forall x_i)\mathcal{A}$.

$\sim(\exists x_i)\sim\mathcal{A} \to (\forall x_i)\mathcal{A}$ SH.

$(\sim(\exists x_i)\sim\mathcal{A} \to (\forall x_i)\mathcal{A}) \to (\sim(\forall x_i)\mathcal{A} \to \sim\sim(\exists x_i)\sim\mathcal{A})$ (K3)

$\sim(\forall x_i)\mathcal{A} \to \sim\sim(\exists x_i)\sim\mathcal{A}$ MP.

$\sim\sim(\exists x_i)\sim\mathcal{A} \to (\exists x_i)\sim\mathcal{A}$ tautologie.

$\sim(\forall x_i)\mathcal{A} \to (\exists x_i)\sim\mathcal{A}$ SH.