Série 7.

1. La formule $\sim(\exists x_i)A$ est par définition $\sim\sim(\forall x_i)\sim A$.
On a $\vdash \sim\sim(\forall x_i)\sim A \to (\forall x_i)\sim A$ tautologie
et $\vdash (\forall x_i)\sim A \to \sim\sim(\forall x_i)\sim A$ tautologie

2. Il faut montrer que
$\vdash_K (\sim(\forall x_i)\sim A(x_i) \longleftrightarrow \sim(\forall x_j)\sim A(x_j))$

Or $\vdash_K A \longleftrightarrow B$ ssi $\vdash_K \sim A \longleftrightarrow \sim B$

(Exercice).

Donc il suffit de montrer
$\vdash (\forall x_i)\sim A(x_i) \longleftrightarrow (\forall x_j)\sim A(x_j)$
et ceci a été montré au cours. (Prop 5.14 des notes)

Exercice : Si $\vdash_K A \longleftrightarrow B$, alors $\vdash_K A \to B$ et $\vdash_K B \to A$.

On a
(1) $A \to B$ — thm de K
(2) $(A \to B) \to (\sim B \to \sim A)$ — tautologie
(3) $\sim B \to \sim A$ — MP (1) et (2)

Donc $\vdash_K \sim B \to \sim A$.

De même
(1) $B \to A$ — thm de K
(2) $(B \to A) \to (\sim A \to \sim B)$ — tautologie
(3) $\sim A \to (\sim B)$ — MP de (1) et (2)

Donc $\vdash_K \sim A \to \sim B$
Donc $\vdash_K (\sim A) \longleftrightarrow (\sim B)$.

Si $\vdash_K \sim A \leftrightarrow \sim B$

Alors $\vdash_K \sim A \rightarrow \sim B$ et $\vdash_K \sim B \rightarrow \sim A$.

(1) $\sim A \rightarrow \sim B$ Thm de K
(2) $(\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ (K3)
(3) $B \rightarrow A$ MP (1) et (3).

(1) $(\sim B \rightarrow \sim A)$
(2) $(\sim B \rightarrow \sim A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (K3)
(3) $A \rightarrow B$ MP (1) et (3)

Donc $\vdash_K A \leftrightarrow B$

4. La formule est démontrablement équivalente à $(\exists x_2)(\forall x_1)(A(x_1) \rightarrow B(x_2))$ qui est sous forme Σ_2. Elle est aussi démontrablement équivalente à
$(\forall x_1)(\exists x_2)(A(x_1) \rightarrow B(x_2))$ qui est sous forme Π_2.

Série 7

3. Les réponses ne sont pas uniques!

(a) La formule est démontrablement équivalente à

$$(\forall x_3) A_1^1(x_3) \to (\forall x_2) A_1^2(x_1, x_2)$$

qui est démontrablement équivalente à

$$(\exists x_3)(\forall x_2) \left(A_1^1(x_3) \to A_1^2(x_1, x_2) \right)$$

(b) La formule est démontrablement équivalente à $(\forall x_1) \left(A_1^2(x_1, x_2) \to (\forall x_3) A_1^2(x_1, x_3) \right)$

qui est démontrablement équivalente à

$$(\forall x_1)(\forall x_3) \left(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_1, x_3) \right)$$

(c) La formule est démontrablement équivalente à

$$(\forall x_1)\left(A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_1, x_2)\right) \to \left((\exists x_4) A_1^1(x_4) \to (\exists x_3) A_1^2(x_2, x_3)\right)$$

qui est démontrablement équivalente à

$$(\forall x_1)(\forall x_4)(\exists x_3)\left(\left(A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_1, x_2)\right) \to \left(A_1^1(x_4) \to A_1^2(x_2, x_3)\right)\right)$$

(d) La formule est démontrablement équivalente à

$$(\exists x_4) A_1^2(x_4, x_2) \to \left(A_1^1(x_1) \to (\forall x_3) \sim A_1^2(x_1, x_3)\right)$$

qui est démontrablement équivalente à

$$(\forall x_4)(\forall x_3)\left(A_1^2(x_4, x_2) \to \left(A_1^1(x_1) \to \sim A_1^2(x_1, x_3)\right)\right)$$

Huitième série d'exercices

1. Si S est non cohérente, alors il existe une formule A telle que $\vdash_S A$ et $\vdash_S \sim A$. On a aussi

$$\vdash_K \sim A \rightarrow (A \rightarrow B) \qquad \text{Car tautologie.}$$

Donc (1) $\sim A$ thm de S.

(2) $\sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$ tautologie.

(3) $A \rightarrow B$ MP (1) et (2).

(4) A thm de S

(5) B MP de (3) et (4).

Donc pour toute formule B on a $\vdash_S B$

---

2. Supposons S non complet. Soit A une formule fermée telle que $\nvdash_S A$ et $\nvdash_S \sim A$.

Comme S est cohérent l'extension obtenue en ajoutant $\sim(\sim A)$ comme axiome est cohérente puisque $\sim A$ n'est pas un théorème de S. Soit S^* cette extension. Dans cette extension $\sim\sim A$ est un théorème.

(1) $\sim\sim A$ thm de S^*

(2) $\sim\sim A \rightarrow A$ tautologie

(3) A MP (1) et (2)

Donc $\vdash_{S^*} A$ et $\nvdash_S A$. Contradiction avec l'hypothèse. Donc S est complet.

3. Pas nécessairement. Par exemple, si on prend $B := \sim A$, alors $A \vee \sim A$ est un théorème de K, mais il est facile de choisir A qui ne soit pas un théorème de K.

4. Soit $A_1, \ldots, A_n$ où $A_n : A$ une preuve de A à partir de T.
Pour chaque A_i :
- soit A_i est un axiome : Alors A_i est vrai dans M.
- Soit A_i est dans T. Alors A_i est vraie dans M modèle de T.
- Soit A_i obtenue par MP de A_j et A_k $j < k < i$. Si A_j et A_k sont vraies dans M, alors A_i vraie dans M. (Prop 4,17 des notes)
- Soit A_i est obtenue par généralisation de A_j qui est vraie dans M. Alors, A_i est vraie dans M par la prop. 4,18 des notes.

Donc A est vraie dans M.
La réciproque n'est pas vraie.
Prenons le modèle $\mathbb{Z}$ de la théorie des groupes. Dans $\mathbb{Z}$ l'addition est commutative, donc on a $(\forall x_1)(\forall x_2)\ x_1 + x_2 = x_2 + x_1$
Mais bien sûr on ne peut déduire cette formule des axiomes de la théorie des groupes (notée T) puisque certains groupes ne sont pas commutatifs.

8.3

5. Soit S est une extension cohérente complète de K. Soit $\mathcal{A}$ une formule fermée. Comme S est complète on sait que soit $\mathcal{A}$, soit $\sim\mathcal{A}$ est un théorème de S. Si $\vdash_S \mathcal{A}$ alors $M_1 \models \mathcal{A}$ et $M_2 \models \mathcal{A}$ car M_1 et M_2 sont des modèles de S.

Si $\nvdash_S \mathcal{A}$ alors $\vdash_S \sim\mathcal{A}$. Donc $M_1 \models \sim\mathcal{A}$ et $M_2 \models \sim\mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ est fausse simultanément dans M_1 et M_2.

Dans tous les cas ~~$\mathcal{A}$~~ vraie dans M_1 ssi $\mathcal{A}$ vraie dans M_2.