SIGLE DU COURS :	MAT 6115
TITRE DU COURS :	Équations différentielles non linéaires
DEVOIR 1	
PROFESSEURE :	Christiane ROUSSEAU
DATE DE REMISE :	Vendredi 27 février 2015

---

1. On définit un système gradient comme un système

$$\dot{x} = -grad\ V(x)$$

où $V(x)$ est une fonction C^∞ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que toute valeur propre du linéarisé du système en un point d'équilibre x est réelle. Dans le cas $n = 2$, montrer en particulier que les seuls points singuliers pour lesquels les valeurs propres du linéarisé sont non nulles sont des points de selle et des noeuds.

b) Montrer que les trajectoires du système sont perpendiculaires aux courbes de niveau de la fonction V.

c) Si $x(t)$ est une solution non constante du système, montrer que $V(x(t))$ est une fonction strictement décroissante de t.

d) Soit x_0 un minimum isolé de V. Montrer que x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

e) Montrer que le système ne peut avoir de solutions périodiques.

---

2. On considère le système de Lorenz :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x),\\ \dot{y} &= \rho x - y - xz,\\ \dot{z} &= -\beta z + xy,\end{aligned}$$

où $\sigma, \rho, \beta > 0$. Montrer qu'il existe un ellipsoïde E donné par

$$\rho x^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2\rho)^2 \leq C < \infty,$$

tel que toutes les solutions pénètrent dans E après un temps fini.

---

3. Montrer que le système

$$\dot{r} = \begin{cases} r^2 \sin(\frac{1}{r}), & r > 0,\\ 0, & r = 0,\end{cases}$$
$$\dot{\theta} = 1$$

a un équilibre stable à l'origine. Est-il asymptotiquement stable?

---

4. On considère le système:

$$\dot{x} = y + xy^2 - x^3 + 2xz^4,$$
$$\dot{y} = -x - y^3 - 3x^2y + 3yz^4,$$
$$\dot{z} = -\frac{5}{2}y^2z^3 - x^2z^3 - \frac{1}{2}z^7,$$

En choisissant une fonction de Lyapunov convenable montrer que l'origine est globalement asymptotiquement stable. En déduire que l'origine est l'unique point singulier du système.

---

5. On considère une EDO $\dot{X} = v(X)$ de classe C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, et son flot Φ^t. Soit D un domaine et $D^t = \Phi^t(D)$ son image par le flot. Soit V^t le volume de D^t.

a) Le volume V^t est donné par l'intégrale multiple $V^t = \int_{D_t} dx_1 \dots dx_n$. Montrer que ce volume vaut

$$V^t = \int_D |\det(D\Phi^t)| dx_1 \dots dx_n.$$

b) En utilisant que $\Phi^t(X) = X + tv(X) = o(t)$, montrer que

$$\left.\frac{dV^t}{dt}\right|_{t=0} = \int_D div(v)\ dx.$$

c) En déduire le théorème de Liouville (le premier): "Le flot d'un système hamiltonien préserve le volume", i.e. si Φ^t est le flot d'un système de hamiltonien H, alors $vol(\Phi^t(D)) = vol(D)$.

d) Par la question 2., vous savez que toutes les trajectoires rentrent dans un ellipsoïde E compact en un temps fini. On définit l'attracteur du système comme $A = \cap_{t>0}\phi^t(E)$. Déduire de ce qui précède que l'attracteur de Lorenz est de mesure nulle.