SIGLE DU COURS : MAT 6115
TITRE DU COURS : Équations différentielles non linéaires
DEVOIR 2
PROFESSEURE : Christiane ROUSSEAU
DATE DE REMISE : Vendredi 16 avril 2010

---

1. On peut remarquer que le calcul de l'application de premier retour de Poincaré au voisinage d'un foyer faible (en calculant $r(\theta, r_0)$ comme développement en série) est encore valable, même si le système n'est pas sous forme normale. Cependant, il est fastidieux puisqu'il faut résoudre des équations différentielles linéaires. On lui préfère souvent la « méthode de Lyapunov ». Supposons qu'un système de classe C^N ait un foyer faible à l'origine

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \sum_{j=2}^{N} p_j(x, y) + o(|x, y|^N), \\ \dot{y} &= x + \sum_{j=2}^{N} q_j(x, y) + o(|x, y|^N), \end{aligned}$$

où p_j et q_j sont homogènes de degré j.

i) Montrer qu'il existe une fonction

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{j=3}^{N} F_j(x, y),$$

où les F_j sont homogènes de degré j telle que

$$\dot{F} = \sum_{k=1}^{M} L_k (x^2 + y^2)^{k+1} + o(|x, y|^{2(k+1)}),$$

où $2(M + 1) \leq N$. (**Suggestion :** Travailler degré par degré. Pour un degré donné, poser les coefficients de F_j comme des inconnues et montrer qu'on peut les trouver comme solution d'un système linéaire. Dans chaque cas, étudier le rang de la matrice du système. Il n'est pas nécessaire de solutionner le système.)

ii) Les constantes L_k sont appelées constantes de Lyapunov. Montrer que si un système est sous forme normale

$$\dot{Z} = i\omega Z + c_1 Z^2 \overline{Z} + \dots c_\ell Z^{\ell+1} \overline{Z}^\ell + o(|Z|^{2\ell+1})$$

et si $\mathrm{Re}(c_1) = \cdots = \mathrm{Re}(c_{\ell-1}) = 0$ et $\mathrm{Re}(c_\ell) \neq 0$, alors $L_1 = \cdots = L_{\ell-1} = 0$ and $L_\ell \neq 0$. De plus L_ℓ a le même signe que $\mathrm{Re}(c_\ell)$. La méthode permet donc de décider si un foyer faible est attractif ou répulsif et aussi de déterminer son ordre.

---

2. Soit $F(x,y)$ un polynôme irréductible de degré n. Alors, $F(x,y) = 0$ est l'équation d'une courbe algébrique. Soit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x,y), \\ \dot{y} &= Q(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

un champ de vecteurs polynomial. La courbe algébrique est invariante sous le flot du champ de vecteurs s'il existe un polynôme $K(x,y)$ tel que

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = K(x,y)F(x,y).$$

En effet, on doit avoir $\dot{F}|_{F(x,y)=0} = 0$, et comme

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial x}P(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}Q(x,y)$$

est un polynôme qui s'annule quand $F(x,y) = 0$, il doit donc être divisible par $F(x,y)$. Le polynôme $K(x,y)$ est appelé le *cofacteur* de $F(x,y)$. La méthode suivante a été introduite par Darboux pour trouver une intégrale première d'un champ de vecteurs polynomial (1) : on suppose que le champ de vecteurs a n courbes algébriques invariantes $F_1(x,y) = 0, \ldots, F_m(x,y) = 0$, de cofacteurs respectifs $K_1(x,y), \ldots, K_m(x,y)$, c'est-à-dire

$$\dot{F}_i(x,y) = F_i(x,y)K_i(x,y).$$

On suppose de plus qu'il existe des constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ telles que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i K_i(x,y) = 0.$$

i) Montrer que

$$H(x,y) = \prod_{i=1}^{m} F_i^{\alpha_i}$$

est une intégrale première du système (c'est-à-dire que H est constante le long des trajectoires).

ii) Montrer que le système suivant a trois droites invariantes

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 + x - y), \\ \dot{y} &= y(-1 + x - y). \end{aligned}$$

En déduire une intégrale première du système.

iii) Montrer que le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x^2 + 3y^2, \\ \dot{y} &= x + xy, \end{aligned}$$

est symétrique par rapport à l'axe y. Trouver une droite invariante et une conique invariante pour le système. En déduire une intégrale première du système. En déduire que l'origine est un centre (toutes les trajectoires au voisinage de l'origine sont périodiques) et non un foyer faible du système.

3. Le système quadratique suivant a été donné par Chen et Wang comme un système ayant 4 cycles limites pour des petites valeurs de ϵ et λ. En étudiant les points à l'infini, vérifier que le système a un cycle limite autour de $(0,0)$ et un cycle limite autour de $(0,1)$ pour $\epsilon = \lambda = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x - y - 3x^2 + (1+\epsilon)xy + y^2, \\ \dot{y} &= x + \frac{2}{9}x^2 - 3xy. \end{aligned}$$

(Les 2 autres cycles autour de l'origine sont obtenus de la façon suivante : l'origine a pour $\epsilon = \lambda = 0$ une bifurcation de Hopf d'ordre 2. En effet on a $\mathrm{Re}(c_1) = 0$, $\mathrm{Re}(c_2) = -77/192$. On aura donc 2 cycles dans une région où $\lambda < 0$, $\mathrm{Re}(c_1) > 0$, i.e. $\epsilon < 0$, avec $|\lambda| \ll |\epsilon|$.)

---

4. On considère le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \epsilon x - y + xz, \\ \dot{y} &= x + \epsilon y + yz, \\ \dot{z} &= -z - (x^2 + y^2) + z^2. \end{aligned}$$

i) Calculer la variété centre à l'ordre 2.

ii) Calculer l'équation de la variété stable à l'ordre 2.

iii) Décrire le flot sur la variété centre près de l'origine et décrire le portrait de phase du champ au voisinage de l'origine pour les différentes valeurs de ϵ au voisinage de $\epsilon = 0$.

---

5. On considère le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy + ax^3 + bxy^2, \\ \dot{y} &= -y + cx^2 + dx^2 y. \end{aligned}$$

Montrer que l'origine est asymptotiquement stable si $a + c < 0$. Dans le cas où $a + c = 0$, montrer que l'origine est asymptotiquement stable si $cd + bc^2 < 0$. Dans le cas où $cd + bc^2 = 0$, montrer que l'origine est asymptotiquement stable si $cd^2 > 0$.