DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE
FACULTÉ DES ARTS ET DES SCIENCES – UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SIGLE DU COURS :	MAT 3060
TITRE DU COURS :	Logique
NOM DE LA PROFESSEURE :	Christiane ROUSSEAU
DEVOIR :	à remettre le 5 novembre 2018

---

1. Montrer que la formule suivante n'est pas logiquement valide

$$(\forall x_1)A_1^2(x_1,x_1) \to (\exists x_2)(\forall x_1)A_1^2(x_1,x_2),$$

mais que, par contre, la formule suivante est logiquement valide

$$(\forall x_1)A_1^2(x_1,x_1) \to (\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2).$$

2. Montrer que pour toutes formules bien formées $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}$, la formule suivante est un théorème de K :

$$(\forall x_i)(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to ((\forall x_i)\mathcal{A} \to (\forall x_i)\mathcal{B})\,.$$

3. Montrer que pour toute formule bien formée $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$, la formule suivante est un théorème de K :

$$(\forall x_i)\mathcal{A} \to (\exists x_i)\mathcal{A}.$$

Définition. On dit que deux formules $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}$ sont *démontrablement équivalentes* si $\underset{K}{\vdash} \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $\underset{L}{\vdash} \mathcal{B} \to \mathcal{A}$.

On admettra la proposition suivante

Proposition. Si x_i est une variable qui apparait libre dans $\mathcal{A}(x_i)$ et si x_j est une variable qui n'apparait, ni libre, ni liée dans $\mathcal{A}(x_i)$, alors $(\forall x_i)\mathcal{A}(x_i)$ et $(\forall x_j)\mathcal{A}(x_j)$ sont démontrablement équivalentes.

4. Montrer que

$$\{(\forall x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2)\} \underset{K}{\vdash} (\forall x_2)(\forall x_3)A_1^2(x_2,x_3).$$

5. Montrer que

$$\{(\forall x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2)\} \underset{K}{\vdash} (\forall x_1)A_1^2(x_1,x_1).$$