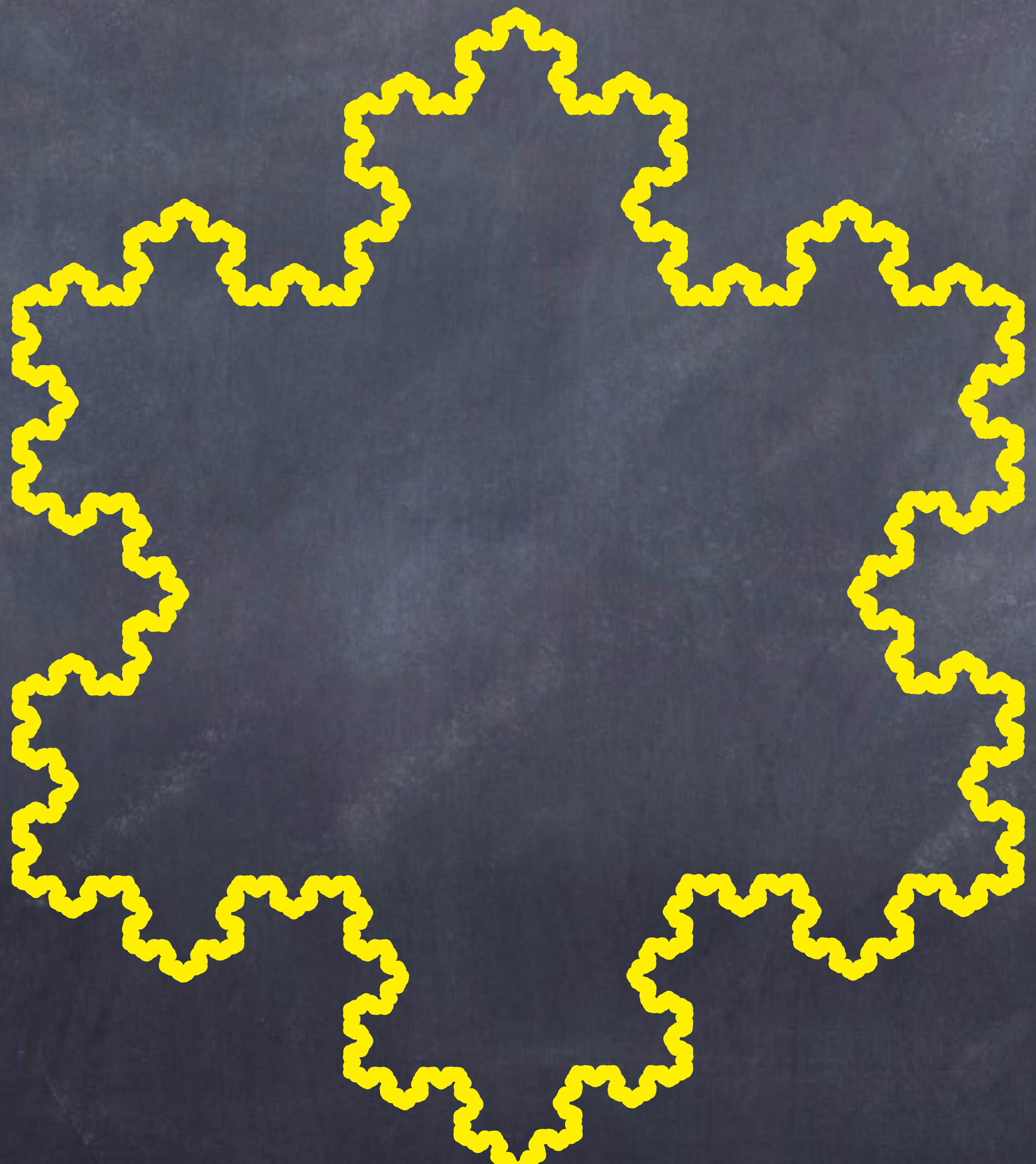
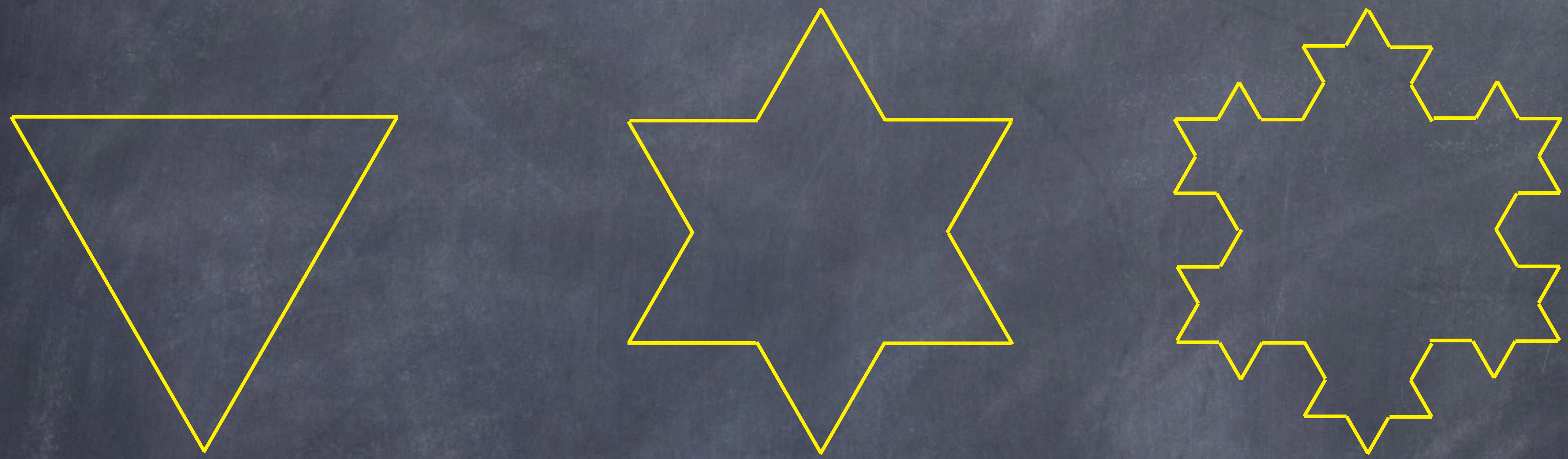
Quelle est la longueur du flocon de von Koch?

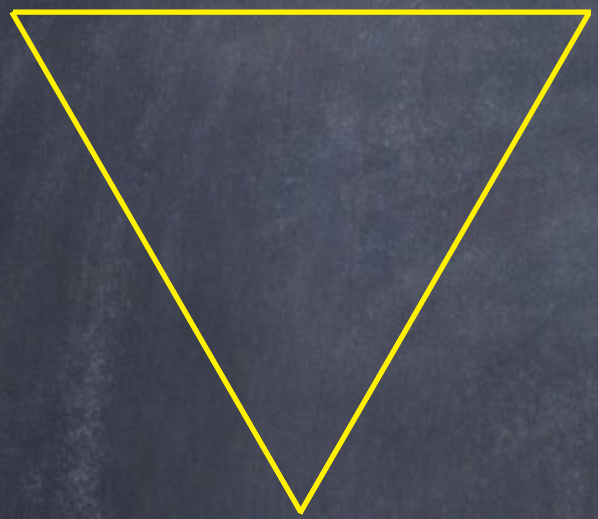


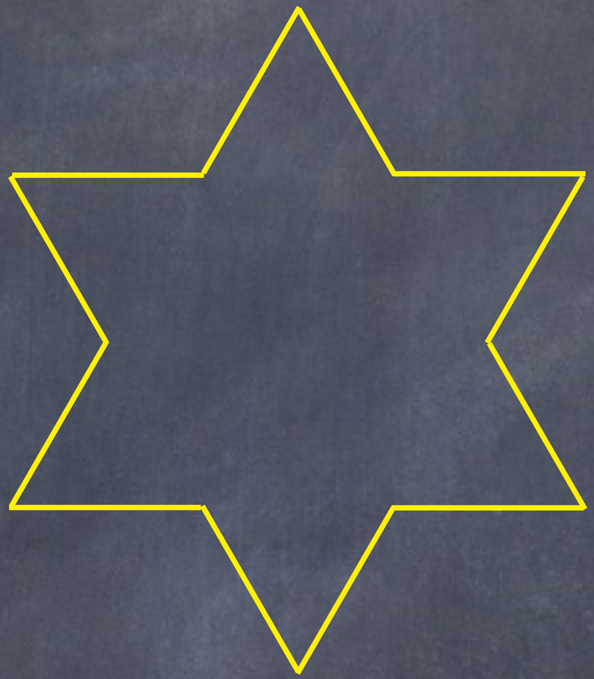
Comment s’obtient ce flocon?

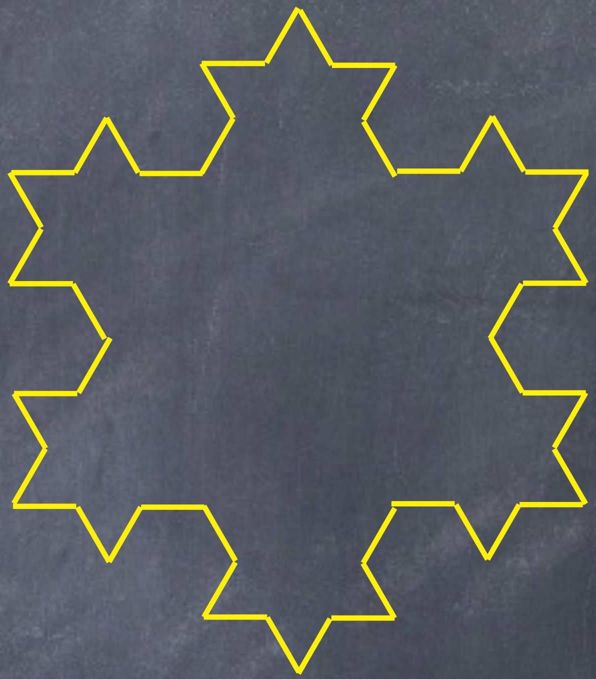


par itération

À chaque étape, la longueur est multipliée par 4/3

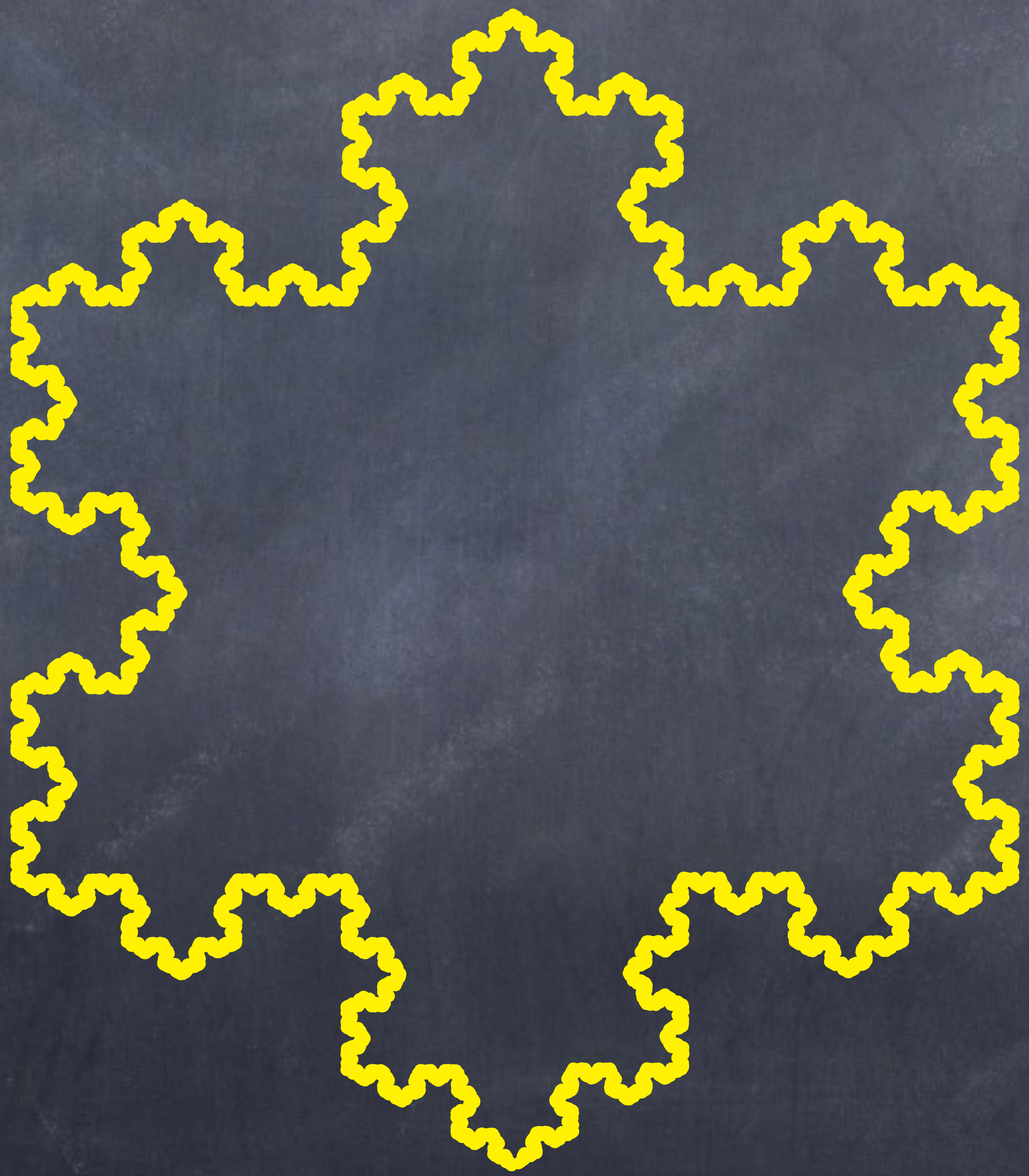






$$L \qquad \frac{4}{3}L \qquad \left(\frac{4}{3}\right)^2 L$$

La longueur du flocon de von Koch est infinie!



On vient de découvrir une propriété des objets fractals qui aura des applications importantes

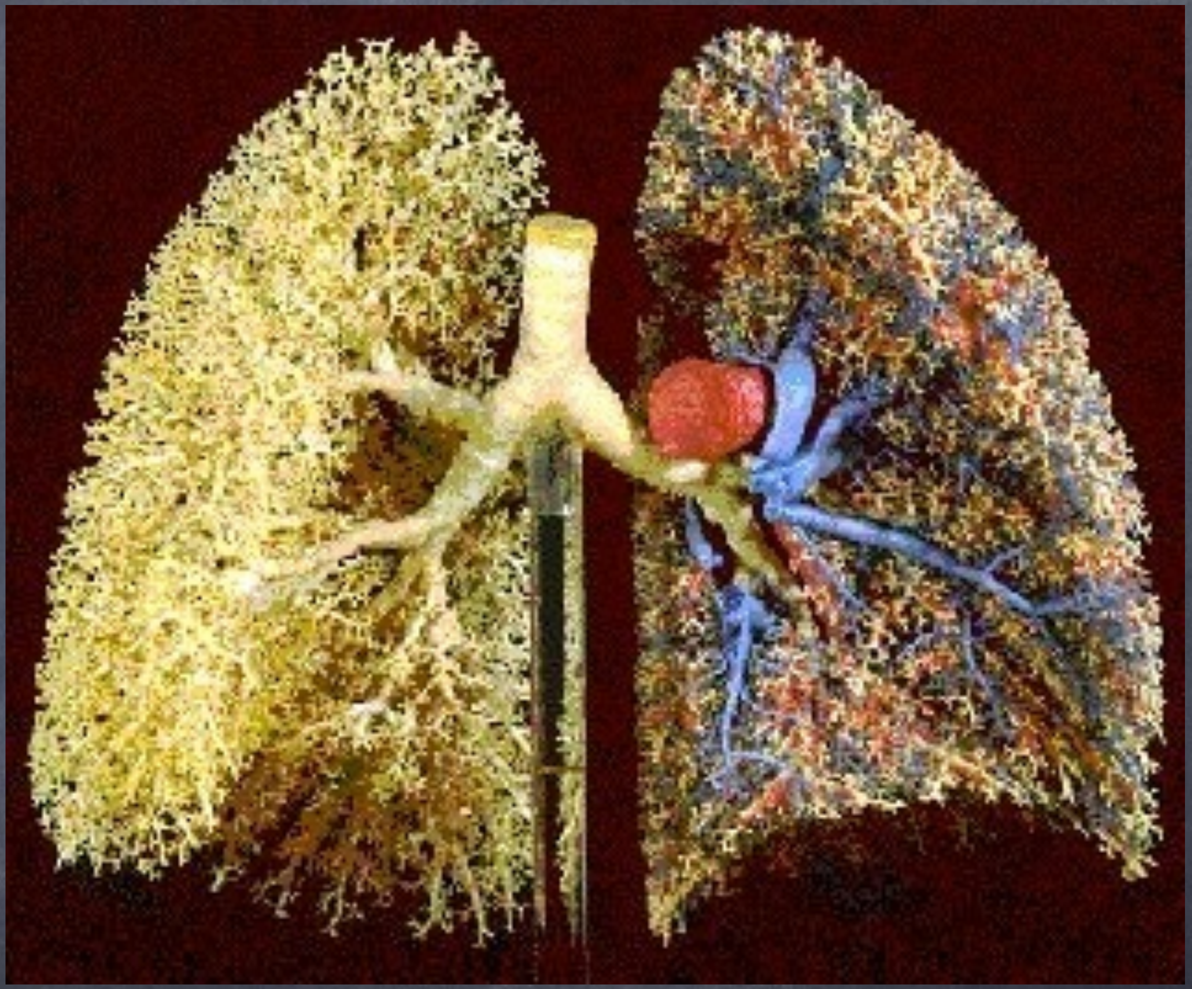
Un objet fractal peut avoir une longueur infinie quand il est contenu dans un domaine fini du plan.

De même une surface de type fractale peut avoir une aire infinie tout en étant contenue dans un volume fini.

Applications

La surface extérieure de l'intestin grêle est d'environ 0,5m^2, alors que la surface interne est d'environ 300m^2. Les villosités permettent d'augmenter l'absorption intestinale.

Le caractère fractal des bronches permet d’augmenter la surface des échanges gazeux entre le sang et les bronches.



La dimension permet de mesurer la complexité d'un objet fractal

- La dimension d'une courbe est 1
- La dimension d'une surface est 2
- La dimension d'un volume est 3

- La dimension de la voie lactée est entre 0 et 1
- La dimension du flocon de von Koch est

$$\frac{\log 4}{\log 3} \simeq 1,26$$

Comment définit-on la dimension?

On veut recouvrir un objet avec de petits carrés

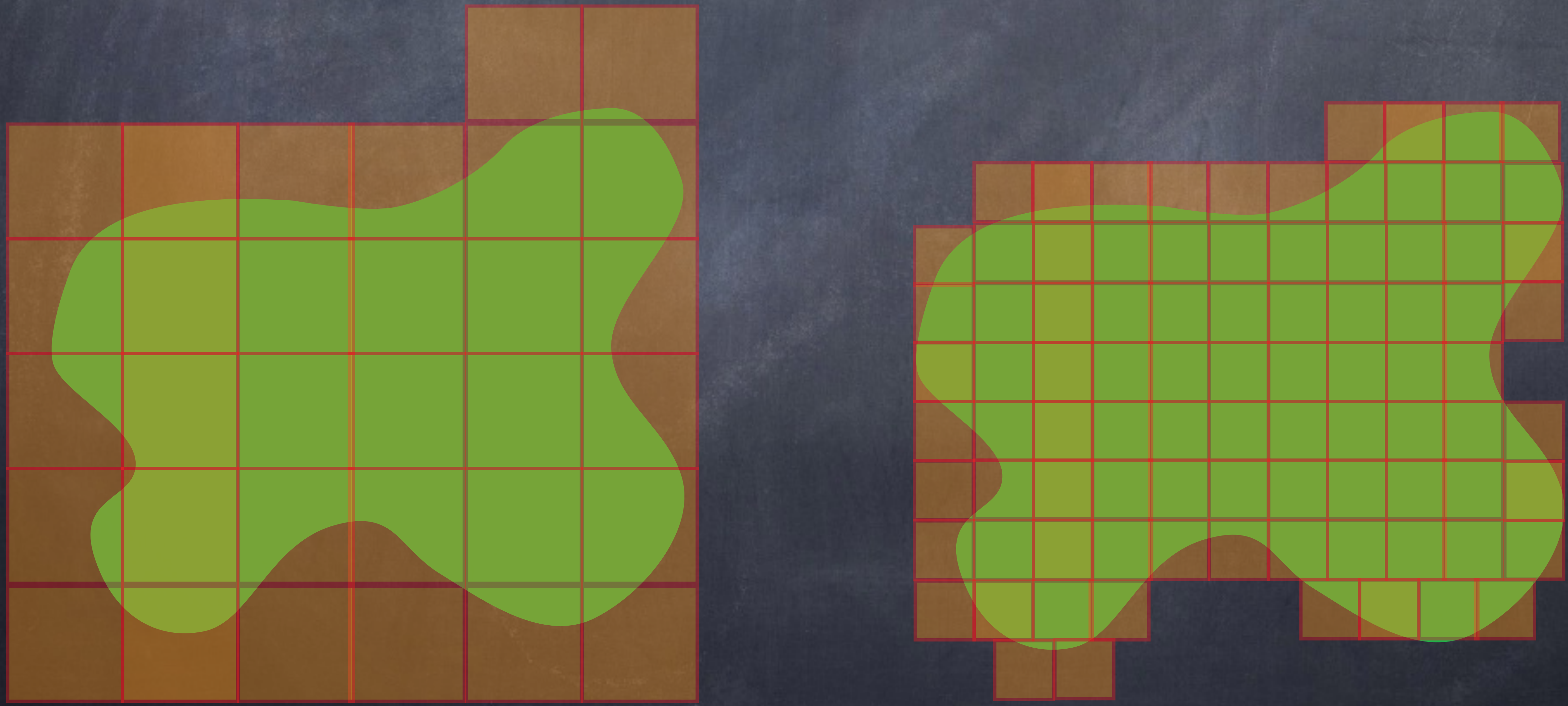
- Prenons une courbe. Si on prend des carrés deux fois plus petits on double à peu près le nombre de carrés nécessaires.

- Si on prend des carrés trois fois plus petits on triple à peu près le nombre de carrés nécessaires

- etc.

Prenons maintenant le cas d'une surface.

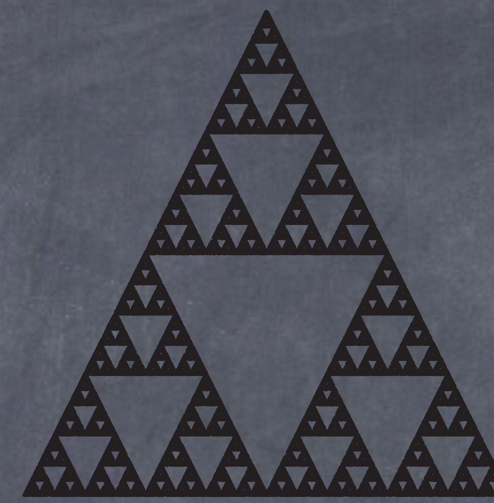
- Si on prend des carrés deux fois plus petits on quadruple à peu près le nombre de carrés nécessaires



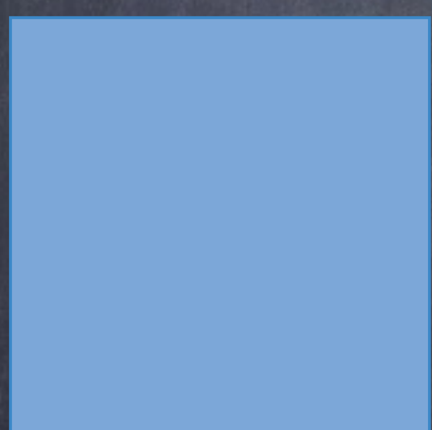
- Si on prend des carrés 3 fois plus petits on aura besoin d'environ 9 fois plus de carrés.
- Si on prend des carrés n fois plus petits on aura besoin d'environ n^2 fois plus de carrés.

Un objet est de dimension d si, quand on prend des carrés n fois plus petits, alors on a besoin d'environ n^d fois plus de carrés pour le recouvrir.

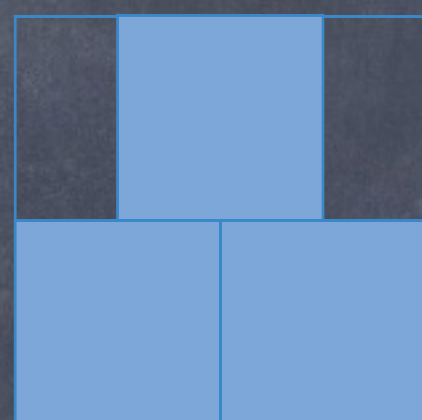
Le tapis de Sierpinski



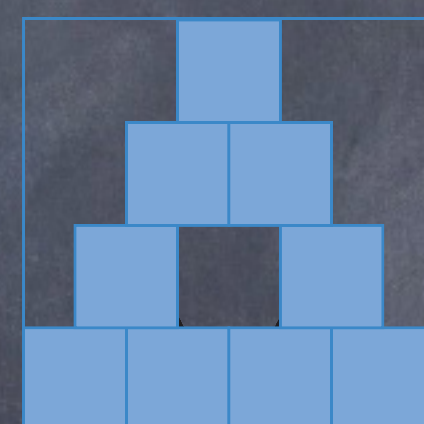
$$d = \frac{\log 3}{\log 2} \simeq 1,585$$



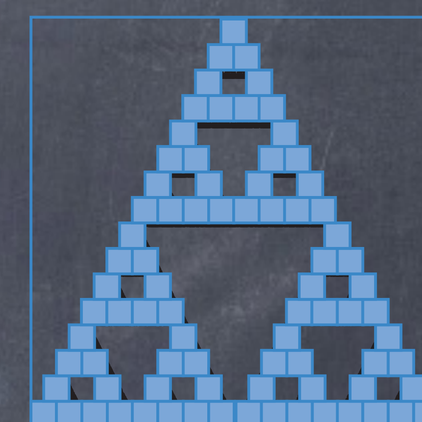
1



3



9

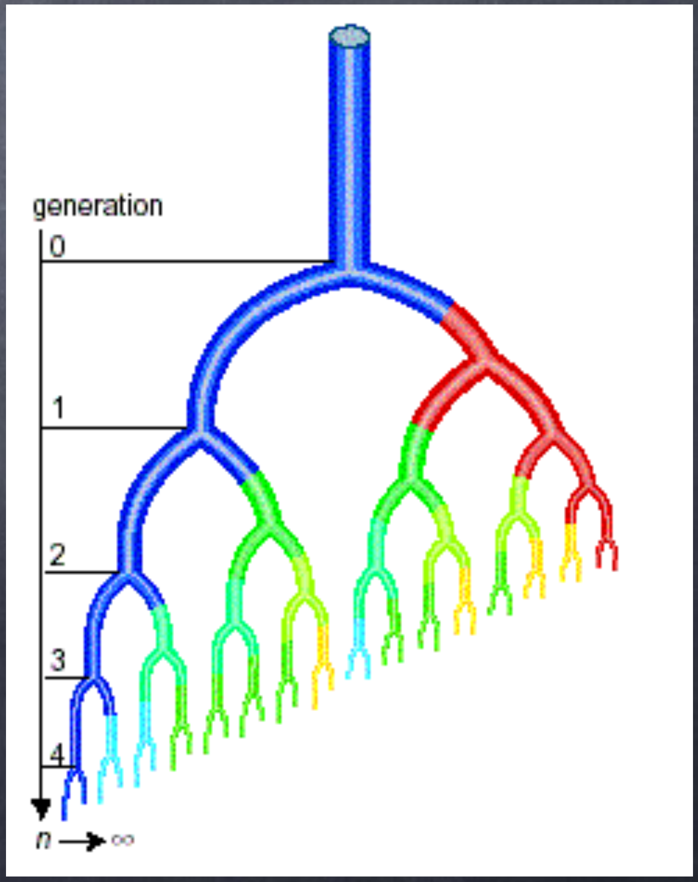


27

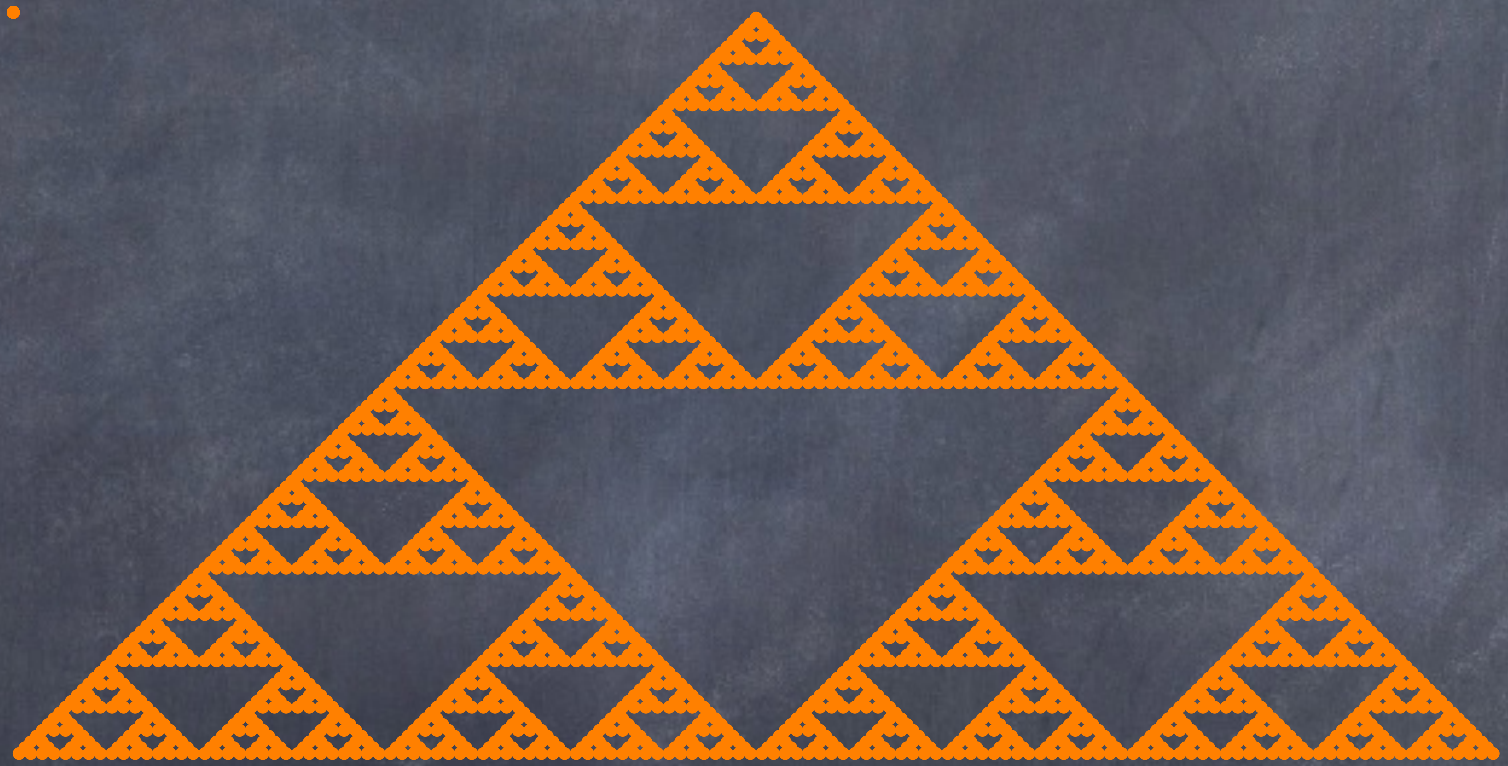
$$3 = 2^{\frac{\log 3}{\log 2}} \qquad 9 = 4^{\frac{\log 3}{\log 2}} \qquad 27 = 8^{\frac{\log 3}{\log 2}}$$

«Applications»

- La dimension fractale des capillaires n'est pas la même au voisinage d'une tumeur que dans les tissus sains.
- Les athlètes de haut niveau sont plus sensibles à l'asthme que la population en général (Benjamin Mauroy).

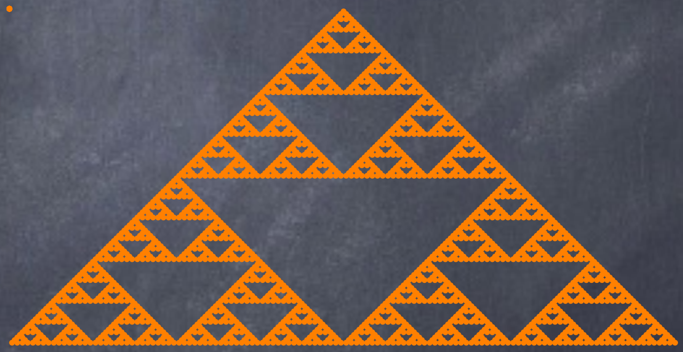


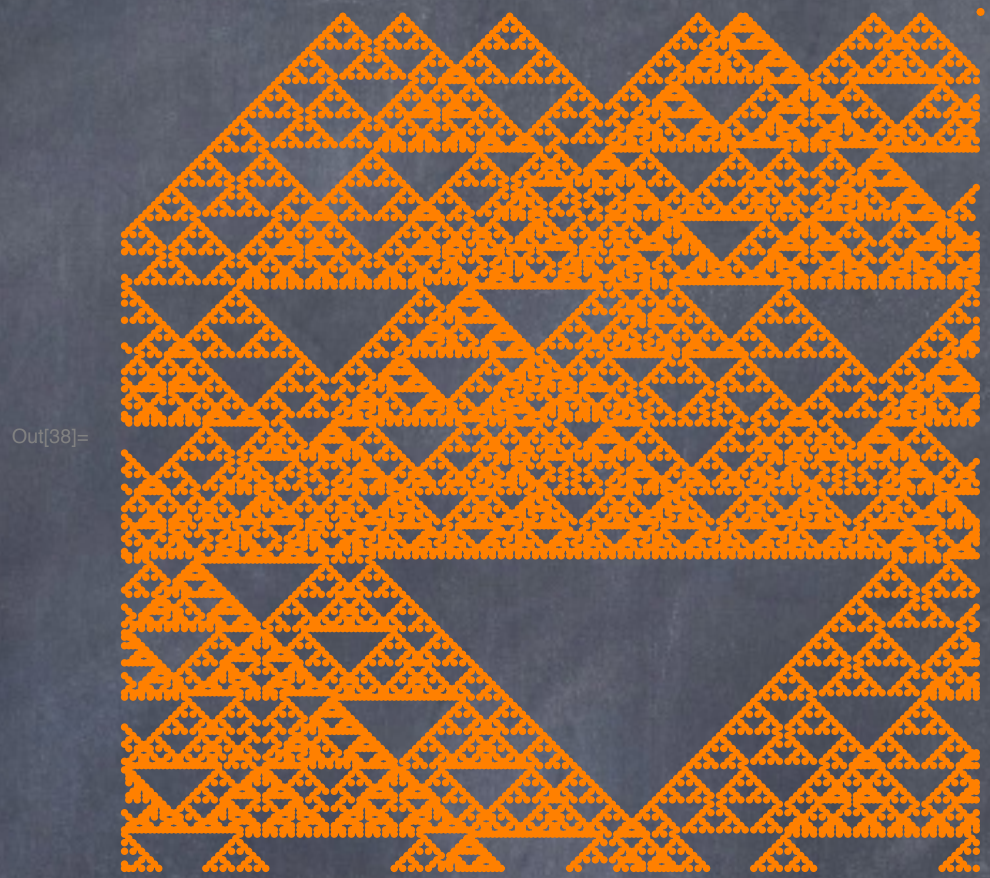
Les mathématiciens aiment bien travailler avec des modèles simples



Le triangle de Sierpinski

Mais sont-ils vraiment plus simples?





Cymbiola innexa REEVE

Un motif généré par ordinateur