MAT 3060

Dixième série d'exercices

Vous pouvez utiliser les exemples de fonctions récursives étudiées au cours, dont les fonctions quotient et reste :

$$\mathrm{quot}(m, n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \text{le quotient de } m \text{ par } n, & n > 0. \end{cases}$$

$$\mathrm{rest}(m, n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \text{le reste de la division de } m \text{ par } n, & n > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction min : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$\min(m, n) = \begin{cases} m, & \text{si} \quad m \leq n, \\ n, & \text{si} \quad m > n, \end{cases}$$

est primitive récursive.

2. Montrer que la fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$g(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

où $\lfloor x \rfloor$ dénote la partie entière d'un nombre réel x, est récursive.

3. Montrer que la relation $R(m, n)$ définie par $R(m, n)$ est vraie si et seulement si $m|n$ (et donc $m \neq 0$) est récursive.

En déduire que la relation $S(m, n)$ définie par $S(m, n)$ est vraie si et seulement si $m + n$ est pair est récursive.

4. Soit p un nombre premier. On considère la fonction $e_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $e_p(0) = 0$ et $e_p(n)$ est l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers, si $n > 0$. Montrer que e_p est récursive.

5. Montrer que si $A_1, \ldots, A_n$ sont des ensembles récursifs, alors $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ et $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ sont des ensembles récursifs.

6. Montrer que la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 1, & n = 1, \\ n^n, & n \geq 2, \end{cases}$$

est récursive.