MAT 3060

Troisième série d'exercices

Ne pas utiliser le théorème d'adéquation pour faire ces exercices.

1. Écrire des preuves dans L pour les formules bf suivantes :

(a) $((p_1 \to p_2) \to (((\sim p_1) \to (\sim p_2)) \to (p_2 \to p_1)))$;

(b) $(p_1 \to (p_2 \to (p_1 \to p_2)))$.

2. Montrer que pour toutes formules bf $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, alors les déductions suivantes sont valides :

(a) $\{(\sim\mathcal{A})\} \vdash_{L} (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$;

(b) $\{(\sim(\sim\mathcal{A}))\} \vdash_{L} \mathcal{A}$.

3. Montrer que pour toutes formules bf $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, alors les formules suivantes sont des théorèmes de L :

(a) $(\mathcal{A} \to (\sim(\sim\mathcal{A})))$;

(b) $((\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \to ((\sim\mathcal{A}) \to (\sim\mathcal{B})))$;

(c) $(\sim(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$;

4. On considère un système formel L' qui diffère de L seulement par le schéma d'axiomes (L_3') qui remplace (L_3) où

$$(L_3') \qquad (((\sim\mathcal{A}) \to (\sim\mathcal{B})) \to (((\sim\mathcal{A}) \to \mathcal{B}) \to \mathcal{A})).$$

Montrer que

$$\vdash_{L} (((\sim\mathcal{A}) \to (\sim\mathcal{B})) \to (((\sim\mathcal{A}) \to \mathcal{B}) \to \mathcal{A}))$$

et

$$\vdash_{L'} (((\sim\mathcal{A}) \to (\sim\mathcal{B})) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})).$$

En déduire que tout théorème de L est un théorème de L' et réciproquement. (Remarque : on n'a pas utilisé le schéma d'axiomes (L3) dans la preuve du théorème de déduction. Donc, on a le droit de l'utiliser dans le système formel L'.)