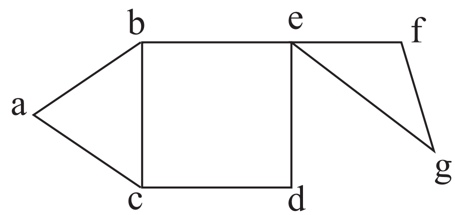

FIGURE 1.8 – Le graphe de l'exercice 1

Ce théorème donne un critère pour montrer qu'un graphe n'est pas un graphe d'intervalle.

COROLLAIRE 5 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe. Si* G *a un cycle d'ordre supérieur ou égal à* 4 *qui n'a pas de corde, alors* G *n'est pas un graphe d'intervalles.*

Les graphes d'intervalles sont aussi très utilisés pour confectionner des horaires (voir exemple 2). Par exemple, pour une compagnie d'aviation, chaque vol correspond à un intervalle. Faire une assignation de pilotes pour couvrir tous les vols revient à faire un coloriage du graphe. Le nombre minimum de pilotes est alors le nombre chromatique du graphe.

1.7 Exercices

1. On considère le graphe G de la figure 1.8.

(a) Donner une marche de b à d qui n'est pas une chaîne.

(b) Donner une chaîne de b à d qui n'est pas un chemin.

(c) Donner un chemin de b à d.

(d) Donner une marche fermée de b à b qui n'est pas un circuit.

(e) Donner un circuit fermé de b à b qui n'est pas un cycle.

(f) Donner un cycle de b à b.

2. On considère le graphe G de la figure 1.9. Combien y a-t-il de chemins dans G de a à g ? Combien ont longueur 5 ?

3. Sept villes a, b, c, d, e, f, g sont reliées par des autoroutes comme suit : l'autoroute A22 va de a à b en passant par c ; l'autoroute A-33 va de c à d, puis passe à b pour se terminer à f ; l'autoroute A-44 va de d à a en passant par e ; l'autoroute A55 va de f à b en passant par g ; l'autoroute A-66 va de g à d.

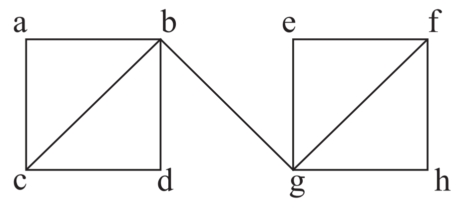

FIGURE 1.9 – Le graphe de l'exercice 2

(a) Dessiner un graphe modélisant cette situation, dont les sommets sont les villes.

(b) Lister tous les chemins de a à g.

(c) Quel est le plus petit nombre de tronçons d'autoroutes à fermer pour qu'on ne puisse plus voyager de c à g ?

(d) Est-il possible de partir de c et d'y retourner en ayant visité toutes les villes exactement une fois ?

(e) Est-il possible de partir de c et de visiter toutes les villes ?

(f) Est-il possible de partir de f et de parcourir tous les tronçons d'autoroutes exactement une fois ? Et de c ?

4. Soit $G = (V, E)$ un graphe sans boucle avec $|V| = v$ et $|E| = e$. Montrer que

$$2e \leq v^2 - v.$$

5. Soit $G = (V, E)$ un graphe. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur V par $a\mathcal{R}b$ si il existe un chemin de a à b dans V. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire les classes d'équivalence.

6. Donner une chaîne eulérienne pour chacun des graphes des figures 1.8 et 1.9.

7. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Donner le nombre de sommets, V, sous chacune des conditions suivantes

(a) G a 9 arêtes et tous les sommets ont degré 3.

(b) G est régulier avec 15 arêtes. (Il y a plusieurs solutions.)

(c) G a 10 arêtes, deux sommets de degré 4, et tous les autres sommets de degré 3.

8. On considère un graphe sans boucle à six sommets, dans lequel chaque sommet est de degré 2. Combien y a-t-il de tels graphes non isomorphes ?

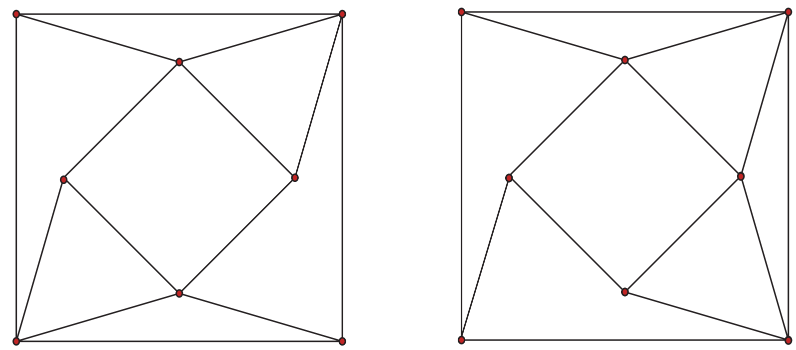

FIGURE 1.10 – Les graphes de l'exercice 9

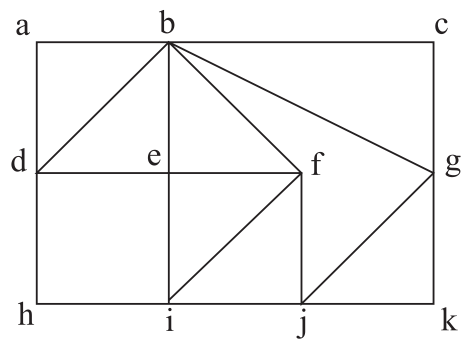

FIGURE 1.11 – Le graphe de l'exercice 10

9. Les deux graphes de la figure 1.10 sont-ils isomorphes ?

10. (a) On considère le graphe de la figure 1.11. Trouver un circuit eulérien.

(b) Si on enlève l'arête $\{d, e\}$, trouver une chaîne eulérienne.

11. Est-il possible de relier 15 ordinateurs de telle sorte que chaque ordinateur soit relié avec exactement trois autres ?

12. Essayez de construire des graphes 3-réguliers avec 4, 5, 6, et 7 sommets. Qu'en déduisez-vous ?

13. On considère un groupe de n personnes dans lequel chaque personne a au moins un ami. Montrez qu'il y a au moins deux personnes qui ont le même nombre d'amis.
Suggestion Penser au principe des tiroirs : si on a $k+1$ objets à mettre dans k tiroirs, alors on a au moins un tiroir qui contient deux objets.

14. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. On définit la *distance* entre deux sommets comme le nombre minimal d'arêtes d'un chemin reliant les deux sommets. Le *diamètre* du graphe est le minimum des distances entre deux sommets du graphe. Décrivez les graphes de diamètre 1.

15. Trois professeurs P_1, P_2 et P_3 doivent donner des cours à trois classes C_1, C_2 et C_3.

P_1 doit donner 2 heures de cours à C_1 et une heure à C_2.

P_2 doit donner une heure de cours à chacune des classes C_1, C_2 et C_3.

P_3 doit donner une heure de cours à C_2 et deux heures à C_3.

Quel est le nombre minimum de plages horaires dont on a besoin pour que ces cours se donnent ? (On essaie de placer le plus de cours possibles en parallèle.)
Suggestion Tracer un multigraphe reliant les professeurs aux cours qu'ils doivent donner. Colorier les arêtes de telle sorte que des cours incompatibles soient coloriés de couleurs différentes.