

## MAT 3060

### Cinquième série d'exercices

1. Soit  $\mathcal{L}$  un langage du premier ordre dont l'alphabet de symboles ne comprend pas de symbole de fonctions. Décrire l'ensemble des termes.

2. Soit  $\mathcal{L}$  un langage du premier ordre dont l'alphabet de symboles ne comprend pas de symbole de constante et le seul symbole de fonction  $f_1^1$ . Décrire l'ensemble des termes.

3. Dans les formules suivantes, dire quelles occurrences de  $x_1$  sont libres et lesquelles sont liées :

- (a)  $(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^2(x_2, a_1))$  ;
- (b)  $(A_1^1(x_3) \rightarrow (\sim(\forall x_1)(\forall x_2)A_1^3(x_1, x_2, a_1)))$  ;
- (c)  $((\forall x_1)A_1^1(x_1) \rightarrow (\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2))$  ;
- (d)  $(\forall x_2)(A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \rightarrow (\forall x_2)A_2^2(x_3, f_2^2(x_1, x_2)))$ .

4. Dans chacune des formules bf suivantes de la forme  $\mathcal{A}(x_1)$ , écrire  $\mathcal{A}(t_j)$  pour les termes  $t_1 = f_1^2(x_1, x_2)$ ,  $t_2 = x_2$  et  $t_3 = x_3$ , lorsque ceux-ci sont libres pour  $x_1$  :

- (a)  $((\forall x_2)(A_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \rightarrow A_1^1(x_1))$  ;
- (b)  $(\forall x_1)(\forall x_3)(A_1^1(x_3) \rightarrow A_1^1(x_1))$  ;
- (c)  $((\forall x_2)A_1^1(f_1^1(x_2)) \rightarrow (\forall x_3)A_1^3(x_1, x_2, x_3))$ .

5. Soit  $\mathcal{L}$  un langage du premier ordre dont l'alphabet de symboles inclut la constante  $a_1$ , le symbole de fonction  $f_1^2$  et le symbole de prédicat  $A_2^2$ . Soit  $\mathcal{A}$  la formule bf

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), a_1) \rightarrow A_2^2(x_1, x_2)).$$

Soit  $I$  l'interprétation définie comme suit :  $D_I = \mathbb{Z}$ ,  $\bar{a}_1 = 0$ ,  $\bar{f}_1^2(x, y) = x - y$  et  $\bar{A}_2^2(x, y)$  signifie  $x < y$ . Écrire l'interprétation de  $\mathcal{A}$  dans  $I$ . Est-elle vraie ou fausse ? Trouver une autre interprétation de  $\mathcal{L}$  dans laquelle l'interprétation de  $\mathcal{A}$  prend la valeur de vérité opposée.

6. On considère l'interprétation standard  $\mathbb{N}$  du langage du premier ordre de l'arithmétique. Trouver si possible une valuation qui satisfait et une qui ne satisfait pas à chacune des formules bf suivantes :

- (a)  $A_1^2(f_1^2(x_1, x_1), f_2^2(x_2, x_3))$  ;
- (b)  $(A_1^2(f_1^2(x_1, a_1), x_2) \rightarrow A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3))$  ;
- (c)  $((\forall x_1)A_1^2(f_2^2(x_1, a_1), x_1) \rightarrow A_1^2(x_1, x_2))$ .

7. On considère l'interprétation standard  $\mathbb{N}$  du langage du premier ordre de l'arithmétique. Lesquelles des formules bf fermées suivantes sont vraies dans  $\mathbb{N}$  ?

- (a)  $(\forall x_1)A_1^2(f_2^2(x_1, a_1), x_1)$  ;
- (b)  $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(f_1^2(x_1, a_1), x_2) \rightarrow A_1^2(f_1^2(x_2, a_1), x_1))$  ;
- (c)  $(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)A_1^2(f_1^2(x_1, x_3), x_2)$ .
- (d)  $(\exists x_1)A_1^2(f_1^2(x_1, x_1), f_2^2(x_1, x_1))$ .