

MAT 3060

Septième série d'exercices

1. Montrer que les formules bf $\sim (\exists x_i)\mathcal{A}$ et $(\forall x_i) \sim \mathcal{A}$ de \mathcal{L} sont démontrablement équivalentes pour toute formule bf \mathcal{A} de \mathcal{L} .

2. Soit $\mathcal{A}(x_i)$ une formule bf de \mathcal{L} dans laquelle x_i apparaît libre, et soit x_j une variable qui n'apparaît, ni libre ni liée, dans $\mathcal{A}(x_i)$. Montrer que

$$\frac{}{\kappa} \vdash ((\exists x_i)\mathcal{A}(x_i) \leftrightarrow (\exists x_j)\mathcal{A}(x_j)).$$

3. Pour chacune des formules suivantes, trouver une formule sous forme normale prénexé à laquelle elle est démontrablement équivalente.

(a) $(\forall x_1)\mathcal{A}_1^1(x_1) \rightarrow (\forall x_2)\mathcal{A}_1^2(x_1, x_2),$

(b) $(\forall x_1)(\mathcal{A}_1^1(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_2)\mathcal{A}_1^2(x_1, x_2)),$

(c) $(\forall x_1)(\mathcal{A}_1^1(x_1) \rightarrow \mathcal{A}_1^2(x_1, x_2)) \rightarrow ((\exists x_2)\mathcal{A}_1^1(x_2) \rightarrow (\exists x_3)\mathcal{A}_1^2(x_2, x_3)),$

(d) $(\exists x_1)\mathcal{A}_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\mathcal{A}_1^1(x_1) \rightarrow \sim(\exists x_3)\mathcal{A}_1^2(x_1, x_3)).$

4. Soit $\mathcal{A}(x_1)$ une formule bf de \mathcal{L} dans laquelle x_2 n'apparaît pas, et soit $\mathcal{B}(x_2)$ une formule bf de \mathcal{L} dans laquelle x_1 n'apparaît pas. Montrer que la formule

$$((\exists x_1)\mathcal{A}(x_1) \rightarrow (\exists x_2)\mathcal{B}(x_2))$$

est démontrablement équivalente à une formule sous forme prénexé de Σ_2 et aussi à une formule sous forme prénexé de Π_2 .