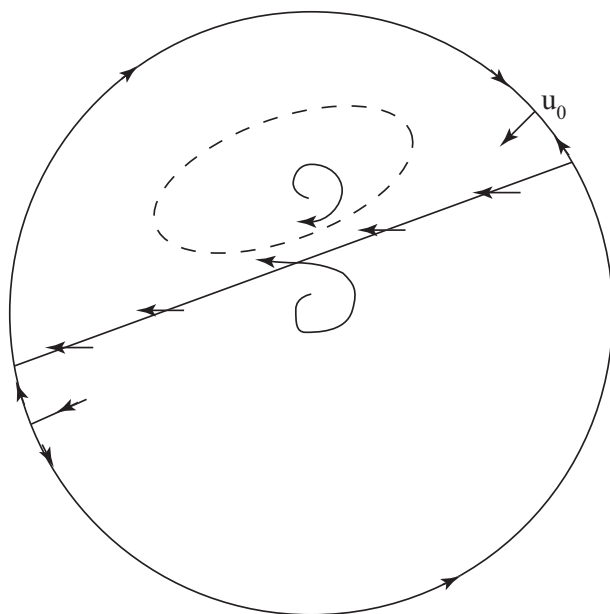


ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES  
MAT 6115



*Christiane ROUSSEAU*  
*Université de Montréal*  
*HIVER 2015*



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>1 Généralités</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction . . . . .	1
1.1.1 Les équations différentielles ordinaires . . . . .	1
1.1.2 Le point de vue de Poincaré . . . . .	2
1.1.3 La théorie des systèmes dynamiques . . . . .	3
1.1.4 Les systèmes hamiltoniens . . . . .	4
1.2 Quelques rappels . . . . .	5
1.2.1 Théorèmes des fonctions inverses et implicites . . . . .	5
1.2.2 Systèmes de coordonnées . . . . .	6
1.2.3 Théorème de point fixe de Banach . . . . .	6
1.3 Théorèmes d'existence et d'unicité . . . . .	7
1.3.1 L'application du flot . . . . .	10
1.3.2 Dépendance des paramètres . . . . .	11
1.3.3 Théorème de redressement . . . . .	11
1.3.4 Prolongement des solutions . . . . .	12
1.4 Rappel sur les systèmes linéaires . . . . .	13
1.5 Un critère pour la stabilité asymptotique . . . . .	15
1.5.1 Le cas linéaire . . . . .	16
1.5.2 Le cas non linéaire . . . . .	18
1.6 Ensembles invariants . . . . .	20
1.7 Variétés stables et instables . . . . .	21
<b>2 Théorie de la stabilité de Lyapunov</b>	<b>31</b>
2.1 Introduction . . . . .	31
2.2 Les raffinements de LaSalle . . . . .	33
<b>3 Équivalences de champs de vecteurs</b>	<b>39</b>
3.1 Introduction . . . . .	39
3.2 Le cas des systèmes linéaires . . . . .	40
3.2.1 Équivalence linéaire . . . . .	40
3.2.2 Équivalence différentiable . . . . .	40
3.2.3 Équivalence topologique . . . . .	41

3.3	Équivalence topologique orbitale . . . . .	44
3.4	Systèmes dynamiques discrets et continus . . . . .	44
3.5	Théorème de Hartman-Grobman . . . . .	48
3.5.1	Étude d'une boucle homoclinique dans le plan . . . . .	49
<b>4</b>	<b>La théorie des formes normales de Poincaré</b>	<b>53</b>
4.1	Introduction . . . . .	53
4.2	La forme normale de Poincaré . . . . .	53
4.2.1	Le cas où $A$ est diagonalisable . . . . .	55
4.2.2	Forme normale avec paramètres . . . . .	58
4.2.3	Le cas où $A$ n'est pas diagonalisable . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Théorie des bifurcations</b>	<b>63</b>
5.1	Introduction . . . . .	63
5.2	La bifurcation de Hopf d'ordre $k$ . . . . .	63

# Chapitre 1

## Généralités

### 1.1 Introduction

#### 1.1.1 Les équations différentielles ordinaires

Les équations différentielles ordinaires (aussi appelées systèmes d'équations différentielles ordinaires) sont, au départ des équations de la forme

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X} = v(X, t),$$

où  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction différentiable sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . La classe de différentiabilité de  $v$  dépend du contexte mais, dans le cours,  $v$  sera toujours au moins de classe  $C^1$ .

Le cas autonome est celui où  $v$  est indépendante de  $t$  :

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X} = v(X).$$

La fonction  $v$  est alors un champ de vecteurs défini sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Plus généralement, on pourra remplacer  $U$  par une variété différentiable de dimension  $n$ , c'est-à-dire un objet qui localement ressemble à  $\mathbb{R}^n$ , et sur lequel la notion de champ de vecteurs de classe  $C^1$  a un sens.

Le cas non autonome peut sembler plus général que le cas autonome. Ce n'est pas vraiment le cas. En effet, considérons une équation différentielle ordinaire non autonome  $\dot{X} = v(X, t)$ . Si on pose  $w(X, t) = (v(X, t), 1)$ , alors l'équation différentielle ordinaire non autonome est équivalente à l'équation différentielle autonome

$$\begin{aligned} \dot{X} &= v(X, t), \\ \dot{t} &= 1, \end{aligned} \tag{1.1}$$

ou encore

$$\dot{Y} = w(Y),$$

pour  $Y = (X, t)$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Donc, le cas non autonome en dimension  $n$  est un cas particulier du cas autonome en dimension  $n + 1$ .

On retrouve les équations différentielles ordinaires dans de très nombreux domaines d'application. Au départ, ce fut la mécanique classique, mais elles sont aussi utilisées en biologie mathématique, pour modéliser des systèmes électriques, dans l'étude des équations aux dérivées partielles, etc. Leur étude fait partie d'un grand chapitre des mathématiques appelé *les systèmes dynamiques*.

### 1.1.2 Le point de vue de Poincaré

Jusqu'aux travaux de Poincaré à la fin du 19-ième siècle, les mathématiciens essayaient d'« intégrer » des équations différentielles ordinaires. Étant donné une équation différentielle ordinaire (1.1), intégrer cette équation, c'est donner, pour tout  $(X_0, t_0)$  « admissible » une solution sous la forme d'une fonction  $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ , où  $W$  un voisinage de  $t_0$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que

$$\frac{df}{dt}(t) = v(f(t), t),$$

et  $f(t_0) = X_0$ . Poincaré a montré que l'intégration par des fonctions connues est impossible en général. Il a par contre introduit des méthodes géométriques pour étudier le comportement des solutions.

Prenons le point de vue autonome. Dans ce point de vue, le théorème d'existence et d'unicité des solutions garantit que, par tout point de  $U$ , il passe une trajectoire et une seule. Ceci donne une partition de  $U$  comme réunion de trajectoires disjointes. Cette partition de  $U$  s'appelle le *portrait de phase* de l'équation différentielle ordinaire. Connaître le portrait de phase d'une équation différentielle ordinaire permet de connaître qualitativement le comportement à long terme des trajectoires et, en particulier, quand le temps tend vers l'infini. Voici quelques comportements possibles :

- une trajectoire part à l'infini, par exemple pour les modèles de croissance de population en laboratoire :  $\dot{x} = ax$  pour  $a > 0$  ;
- une trajectoire se stabilise à une position d'équilibre, par exemple un pendule amorti ;
- une trajectoire s'approche d'une solution périodique appelée cycle limite, par exemple lorsque votre cœur reprend son rythme normal après un effort ;
- on verra qu'il existe des comportements « chaotiques » qui restent cependant bornés. C'est le cas de la trajectoire de Pluton.

Donner le portrait de phase d'une équation différentielle ordinaire est un problème très difficile. Il n'existe pas de méthode générale, seulement des méthodes ad hoc qu'on essaie d'agencer au mieux en fonction des particularités du système étudié. La première étape est la théorie locale : on étudie la répartition des trajectoires au voisinage d'un point  $X_0$  de  $U$ . Cette étude est assez systématique. C'est le recollement des portraits de phase locaux en un portrait de phase global qui l'est moins. Les équations différentielles ordinaires

issues d'un processus de modélisation dépendent souvent de paramètres. Il est donc naturel d'étudier des équations différentielles ordinaires dépendant de paramètres et, pour chaque valeur des paramètres, de donner le portrait de phase. On rencontrera des valeurs des paramètres pour lesquelles le portrait de phase subira un changement qualitatif. Une telle valeur des paramètres est appelée *valeur de bifurcation* et on dit que le système subit une *bifurcation*. Lorsque la bifurcation concerne le comportement des trajectoires au voisinage d'un point singulier, il existe des méthodes analytiques permettant de l'étudier en détail, au moins lorsque la dimension,  $n$ , n'est pas trop grande et que la singularité n'est pas trop complexe (« petite codimension »). L'analyse de la bifurcation nous donne donc une « prise » pour étudier le système.

La stratégie d'études des systèmes dynamiques consiste à exploiter au maximum les quelques prises qu'on a sur le système et à tenter d'en déduire les portraits de phase. Les principales prises sont l'étude des singularités, l'étude des bifurcations des singularités (cela nous permettra par exemple de conclure à la présence de cycles limites), et quelques théorèmes globaux comme le théorème de Poincaré-Bendixson.

### 1.1.3 La théorie des systèmes dynamiques

La théorie des systèmes dynamiques étudie l'évolution des systèmes dans le temps. Lorsque le temps est continu, on a les équations différentielles ordinaires. Lorsque le temps est discret, ce sont les équations aux différences. Une équation aux différences est une équation de la forme

$$X_{n+1} = F(X_n, n),$$

où  $X \in \mathbb{R}^n$  et  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , pour  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Elle est autonome si  $F$  ne dépend que de  $X$  et est indépendante de  $n$ .

La dualité « systèmes discrets — systèmes continus » jouera un rôle important dans l'étude des systèmes dynamiques. Par exemple, lorsqu'on voudra étudier le voisinage d'une solution périodique, on prendra une section transversale  $\Sigma$  à la solution périodique et on introduira une fonction  $P : \Sigma' \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$ , appelée application de premier retour de Poincaré. Une solution périodique correspondra à un point fixe de  $P$ . Étudier la stabilité de la solution périodique revient à étudier la stabilité du point fixe correspondant de  $P$ .

Un autre contexte naturel d'étude des équations différentielles ordinaires où on introduit une application est celui d'une équation non autonome  $\dot{x} = v(x, t)$ , où  $v$  est périodique en  $t$  de période  $T$ . Étant donné un temps initial  $t_0$ , soit  $\Phi(t, X_0)$  la solution du système telle que  $\Phi(t_0, X_0) = X_0$ . On introduira la

fonction  $F(X_0) = \Phi(t_0 + T, X_0)$  et ses itérées

$$\begin{aligned} F^2 &:= F \circ F, \\ \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \\ F^n &:= \underbrace{F \circ \dots \circ F}_n, \\ \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Étudier  $F$  et ses itérées revient à avoir une vue stroboscopique du système.

Parmi les différentes approches de l'étude des équations aux dérivées partielles, il existe une approche « systèmes dynamiques » qui consiste à considérer une équation aux dérivées partielles comme un système dynamique de dimension finie. Dans certains cas des méthodes de réduction permettent de se ramener à l'étude de systèmes en dimension finie.

#### 1.1.4 Les systèmes hamiltoniens

Regardons le problème des  $n$  corps. C'est le problème de  $n$  points matériels soumis à la loi de la gravitation universelle de Newton. Si  $\vec{X}_i$  dénote la position du  $i$ -ième point matériel dans  $\mathbb{R}^3$ , ceci nous donne les équations de Newton :

$$m_i \ddot{\vec{X}}_i = K \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{\vec{X}_j - \vec{X}_i}{|\vec{X}_j - \vec{X}_i|^3}. \quad (1.2)$$

En changeant d'unité, on peut toujours supposer  $K = 1$ . Posons  $m_i \dot{\vec{X}}_i = \vec{p}_i$ . Alors, l'équation de Newton devient équivalente au système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{aligned} \dot{\vec{X}}_i &= \frac{1}{m_i} \vec{p}_i, \\ \dot{\vec{p}}_i &= \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{\vec{X}_j - \vec{X}_i}{|\vec{X}_j - \vec{X}_i|^3}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ce système a une forme très particulière. En effet, l'énergie cinétique est donnée par

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \langle \dot{\vec{X}}_i, \dot{\vec{X}}_i \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \langle \vec{p}_i, \vec{p}_i \rangle$$

et l'énergie potentielle par

$$V = - \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\vec{X}_j - \vec{X}_i|}.$$



Soit  $H = K + V$  l'énergie totale : c'est une fonction des vecteurs  $\vec{X}_i$  et  $\vec{p}_i$ . Remarquons que

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} = \frac{1}{m_i} \vec{p}_i.$$

(Ici,  $\frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i}$  représente un gradient.) Aussi,

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{X}_i} = - \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{\vec{X}_j - \vec{X}_i}{|\vec{X}_j - \vec{X}_i|^3}.$$

Donc, le système a la forme

$$\begin{cases} \dot{\vec{X}}_i = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i}, \\ \dot{\vec{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \vec{X}_i}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

On pose  $\vec{X} = (\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$  et  $\vec{p} = (\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ . Le système a la forme simple

$$\begin{aligned} \dot{\vec{X}} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}, \\ \dot{\vec{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{X}}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

sur  $\mathbb{R}^{2N}$  (ici  $N = 3n$ ). Un tel système est appelé *système hamiltonien*. Une partie très importante de la mécanique classique se ramène à l'étude des systèmes hamiltoniens. Ceux-ci sont des systèmes d'équations différentielles ordinaires. La mécanique classique est donc une justification significative de l'importance des systèmes d'équations différentiels non linéaires. De part sa forme, un système hamiltonien est toujours défini sur un espace de dimension paire égale à  $2N$ .  $N$  est appelé le *nombre de degrés de liberté du système*.

## 1.2 Quelques rappels

### 1.2.1 Théorèmes des fonctions inverses et implicites

Ce sont deux grands théorèmes de l'analyse. On les utilisera à tour de bras.

**THÉORÈME 1.1** (*Théorème des fonctions inverses*) Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , (resp.  $C^\infty$ ,  $C^\omega$  ou analytique). Soit  $X_0 \in U$ . Si  $\text{Jac}(F)(X_0) = DF(X_0) = A$  est inversible, alors il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $X_0$  dans  $U$  et un voisinage ouvert  $W$  de  $F(X_0)$  dans  $\mathbb{R}^n$  tels que  $F|_V : V \rightarrow W$  est bijective. De plus,  $F^{-1} : W \rightarrow V$  est aussi de classe  $C^r$  (resp.  $C^\infty$ ,  $C^\omega$ ) et

$$\text{Jac}(F^{-1})(F(X_0)) = DF^{-1}(F(X_0)) = A^{-1} = (\text{Jac}(F)(X_0))^{-1} = (DF(X_0))^{-1}.$$

**THÉORÈME 1.2** (*Théorème des fonctions implicites*) Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{m+n}$  et  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , (resp.  $C^\infty$ ,  $C^\omega$  ou analytique). On note  $(X, Y)$  les coordonnées sur  $U$ , où  $X \in \mathbb{R}^m$  et  $Y \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $(X_0, Y_0) \in U$  tel que  $F(X_0, Y_0) = 0$ . Si  $\text{Jac}_Y(F(X_0, \cdot))(Y_0) = D_Y F(X_0, Y_0)$  est inversible, alors il existe

- un voisinage ouvert  $V$  de  $(X_0, Y_0)$  dans  $U$ ,
- un voisinage ouvert  $W$  de  $X_0$  dans  $\mathbb{R}^m$ ,
- et une fonction  $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  dont le graphe est inclus dans  $V$  et telle que  $f(X_0) = Y_0$ ,

tels que, si  $(X, Y) \in V$ , alors  $F(X, Y) = 0$  si et seulement si  $Y = f(X)$ . De plus  $f$  est de classe  $C^r$  (resp.  $C^\infty$ ,  $C^\omega$ ).

### 1.2.2 Systèmes de coordonnées

**DÉFINITION 1.3** Un système de coordonnées de classe  $C^r$  (resp.  $C^\infty$ ,  $C^\omega$  ou analytique, linéaire) sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  est formé de  $n$  familles d'hypersurfaces  $\{\gamma_{\alpha_i}^i\}$  de classe  $C^r$  (resp.  $C^\infty$ ,  $C^\omega$ , linéaire),  $i = 1, \dots, n$  telles que

- pour tout  $i$ ,  $U = \cup_{\alpha_i} \gamma_{\alpha_i}^i$ ;
- pour tout  $X \in U$ , il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  uniques tels que  $X = \cap \gamma_{\alpha_i}^i$ ;
- les hypersurfaces  $\gamma_{\alpha_i}^i$  sont de la forme  $F_i(X) = C_i(\alpha_i)$  où  $F_i$  est de classe  $C^r$  (resp.  $C^\infty$ ,  $C^\omega$  ou analytique, linéaire);
- la fonction  $F = (F_1, \dots, F_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est inversible. Ceci implique que, pour tout  $X_0 \in U$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que  $X_0 = \cap \gamma_{\alpha_i}^i$ , alors les hypersurfaces  $\gamma_{\alpha_i}^i$  sont transversales en  $X_0$ , c'est-à-dire que les vecteurs  $\nabla F_{\alpha_1}(X_0), \dots, \nabla F_{\alpha_n}(X_0)$  sont linéairement indépendants.

Le choix de la classe ( $C^r$ ,  $C^\infty$ ,  $C^\omega$ , linéaire) dépend du contexte. Lorsqu'on considère un système d'équations différentielles de classe  $C^{r+1}$  (resp.  $C^\infty$ ,  $C^\omega$ , linéaire), on permet en général des changements de coordonnées dans la même classe pour garder cette caractéristique du système.

On veut comprendre l'organisation géométrique des trajectoires d'un système d'équations différentielles ordinaires. On utilisera régulièrement des changements de coordonnées pour simplifier la forme des équations et rendre ainsi la géométrie plus transparente.

### 1.2.3 Théorème de point fixe de Banach

**THÉORÈME 1.4** (*Théorème de point fixe de Banach*) Soit  $\mathcal{X}$  un espace métrique complet et  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  une contraction (c'est-à-dire qu'il existe  $c \in ]0, 1[$  tel que pour tous  $x, y \in \mathcal{X}$  on ait  $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$ ). Alors,  $f$  a un unique point fixe.

**PREUVE** Commençons par l'unicité : si  $x$  et  $y$  sont deux points fixes, alors  $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$  et, d'autre part, puisque  $f(x) = x$  et  $f(y) = y$ , on a  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ . La seule possibilité est  $d(x, y) = 0$ , c'est-à-dire  $x = y$ .

Passons maintenant à l'existence. Soit  $x_0 \in \mathcal{X}$ . On définit par récurrence la suite  $x_n$  en posant  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Montrons que la suite est de Cauchy. Soit

$\epsilon > 0$ . On cherche  $N$  tels que si  $m, n > N$ , alors  $d(x_m, x_n) < \epsilon$ . On a

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq cd(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq c^n d(x_1, x_0).$$

Alors, pour  $m > n$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq d(x_1, x_0)(c^{m-1} + \dots + c^n) \\ &\leq d(x_1, x_0) \frac{c^n}{1-c}. \end{aligned}$$

On voit bien que  $d(x_1, x_0) \frac{c^n}{1-c} < \epsilon$  pour  $N$  assez grand.

Comme l'espace métrique  $\mathcal{X}$  est complet, la suite  $\{x_n\}$  converge vers un point  $a \in \mathcal{X}$ . Donc,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . De plus, puisque  $f$  est une contraction, alors  $f$  est uniformément continue (exercice). Alors,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ . Donc,  $f(a) = a$ .  $\square$

### 1.3 Les théorèmes d'existence et d'unicité des systèmes d'équations différentielles ordinaires

Suite à la remarque qu'une équation différentielle ordinaire non autonome en dimension  $n$  peut se ramener à une équation différentielle autonome en dimension  $n + 1$ , on ne discutera que le cas autonome.

**Notation** On note par  $B(X, r)$  la boule centrée en  $X$  de rayon  $r$  et  $\bar{B}(X, r)$  sa fermeture.

**THÉORÈME 1.5** *On considère un champ de vecteurs  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^r$  (resp.  $C^\infty, C^\omega$ ) et  $X_0 \in U$ . Il existe  $\delta > 0, \epsilon > 0$  et une fonction  $\Phi(X, t)$  de classe  $C^r$  (resp.  $C^\infty, C^\omega$ ) définie sur  $\{X \in U; |X - X_0| < \delta\} \times \{t \in ]-\epsilon, \epsilon[ \}$  tels que pour tout  $X_1 \in B(X_0, \delta)$ , la fonction  $\Phi(X_1, \cdot) : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow U$  est solution de l'équation différentielle ordinaire  $\dot{X} = v(X)$  sous la condition initiale  $\Phi(X_1, 0) = X_1$ . La solution est unique au sens suivant : si on a deux solutions de l'équation différentielle ordinaire  $\dot{X} = v(X)$  sous la même condition initiale, alors elles coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition.*

**PREUVE** On va trouver  $\Phi$  comme point fixe d'un opérateur. En effet, supposons que  $\Phi(X_1, t)$  soit solution de l'équation intégrale

$$\Phi(X_1, t) = X_1 + \int_0^t v(\Phi(X_1, s)) ds. \quad (1.6)$$

En dérivant, on voit tout de suite que  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(X_1, t) = v(\Phi(X_1, t))$  et que  $\Phi(X_1, 0) = X_1$ . Donc, la fonction  $t \mapsto \Phi(X_1, t)$  est la solution cherchée.

On considère l'opérateur  $\Phi \mapsto T(\Phi)$  où

$$T(\Phi)(X_1, t) = X_1 + \int_0^t v(\Phi(X_1, s)) ds. \quad (1.7)$$

Pour pouvoir montrer que  $T$  a un point fixe, il faut montrer que  $T$  est défini sur un espace de fonctions  $\mathcal{X}$ , qui est un espace métrique complet, que l'image de  $T$  est aussi dans  $\mathcal{X}$  et que  $T$  est une contraction.

On prend  $\delta$  suffisamment petit pour que la fermeture de la boule de rayon  $2\delta$  centrée en  $X_0$ , soit incluse dans  $U$ . Soit

$$M = \max_{X \in \overline{B}(X_0, 2\delta)} |v(X)|,$$

et soit

$$K = \max_{X \in \overline{B}(X_0, 2\delta)} \|Dv(X)\|.$$

On définit

$$\mathcal{X} = \{\Phi : \overline{B}(X_0, \delta) \times [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \overline{B}(X_0, 2\delta) \mid \Phi \text{ continue, } \Phi(X_1, 0) = X_1\}.$$

Sur  $\mathcal{X}$  on définit la norme

$$\|\Phi\| = \max_{(X_1, t) \in \overline{B}(X_0, \delta) \times [-\epsilon, \epsilon]} |\Phi(X_1, t)|.$$

Montrons qu'on peut choisir  $\epsilon$  pour que  $T(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$ . Il est facile de voir que  $T(\Phi)$  est continue si  $\Phi$  est continue et que  $T(\Phi)(X, 0) = X$ . Aussi,

$$\begin{aligned} |T(\Phi)(X_1, t) - X_0| &\leq |T(\Phi)(X_1, t) - X_1| + |X_1 - X_0| \\ &\leq \int_0^t |v(\Phi(X_1, s))| ds + \delta \\ &\leq \int_0^t M dt + \delta \\ &\leq M\epsilon + \delta \leq 2\delta, \end{aligned} \tag{1.8}$$

si on choisit  $\epsilon$  pour que  $M\epsilon < \delta$ .

Il faut maintenant voir qu'on peut choisir  $\epsilon$  pour que  $T$  soit une contraction. Soient  $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{X}$ . On a pour tout  $X \in \overline{B}(X_0, \delta)$  et pour tout  $t \in [-\epsilon, \epsilon]$

$$\begin{aligned} |T(\Phi_1)(X_1, t) - T(\Phi_2)(X_1, t)| &= \left| \int_0^t (v(\Phi_1(X_1, s)) - v(\Phi_2(X_1, s))) ds \right| \\ &\leq \int_0^t |v(\Phi_1(X_1, s)) - v(\Phi_2(X_1, s))| ds \\ &\leq \int_0^t K |\Phi_1(X_1, s) - \Phi_2(X_1, s)| ds \\ &\leq \epsilon K \|\Phi_1 - \Phi_2\|. \end{aligned} \tag{1.9}$$

On obtient donc une contraction si on prend  $\epsilon$  assez petit pour que  $K\epsilon < 1$ .

On ne montrera pas ici que  $\mathcal{X}$  est un espace métrique complet, mais c'est standard. On peut donc appliquer le théorème de point fixe de Banach et conclure que  $T$  a un unique point fixe dans  $\mathcal{X}$ . Nous venons donc de démontrer l'unicité de la solution de l'équation différentielle. Ce point fixe est une fonction  $\Phi(X_1, t)$ , continue, qui satisfait l'équation intégrale (1.6). Comme le membre de droite est continûment dérivable en  $t$ , on en conclut que  $\Phi(X_1, t)$  est continûment dérivable en  $t$ .

Montrer que  $\Phi(X_1, t)$  est continûment dérivable en  $X_1$  requiert plus de travail. Il faut trouver un candidat pour  $\frac{\partial \Phi}{\partial X_1}$ . Voici comment on le trouve. Supposons que  $\Phi$  est de classe  $C^1$ . On a alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} \right) = \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial X_1} v(\Phi(X_1, t)) = Dv(\Phi(X_1, t)) \frac{\partial \Phi}{\partial X_1}. \quad (1.10)$$

On vient de montrer que  $\frac{\partial \Phi}{\partial X_1}$  est solution d'une équation différentielle linéaire (mais pas à matrice constante) appelée *équation aux variations*. Puisque  $\Phi(X_1, 0) = X_1$ , ceci nous donne  $\frac{\partial \Phi}{\partial X_1}(X_1, 0) = I_n$ , soit la matrice identité  $n \times n$ . Appelons  $A(X_1, t)$  la matrice  $A(X_1, t) = Dv(\Phi(X_1, t))$ , et soit  $\Psi(X_1, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} \in \mathbb{R}^{n^2}$ . On a le système  $\dot{\Psi} = A(X_1, t)\Psi$ . C'est un système du style précédemment étudié et sa solution peut être construite comme solution de l'équation intégrale

$$\Psi(X_1, t) = I_n + \int_0^t A(X_1, s)\Psi(X_1, s)ds,$$

c'est-à-dire comme point fixe de l'opérateur

$$S(\Psi)(X_1, t) = I_n + \int_0^t Dv(\Phi(X_1, s))\Psi(X_1, s)ds.$$

Cette solution va exister si  $\epsilon$  est assez petit. On veut maintenant voir que cette solution est bien  $\frac{\partial \Phi}{\partial X_1}$ .

Pour cela, on va regarder comment sont obtenues les solutions des deux équations intégrales définissant  $\Phi$  et  $\Psi$  : ce sont les limites des suites  $\Phi_m$  et  $\Psi_m$  définies par

$$\begin{cases} \Phi_0(X_1, t) = X_1, \\ \Psi_0(X_1, t) = I_n, \\ \Phi_{m+1}(X_1, t) = T(\Phi_m)(X_1, t), \\ \Psi_{m+1}(X_1, t) = S_m(\Psi_m)(X_1, t), \end{cases}$$

où

$$S_m(\Psi)(X_1, t) = I_n + \int_0^t Dv(\Phi_m(X_1, s))\Psi(X_1, s)ds.$$

On peut vérifier qu'à chaque étape on a  $\Psi_m = \frac{\partial \Phi_m}{\partial X_1}$ . Ceci se montre par induction. C'est évident pour  $m = 0$ . Supposons que ce soit vrai pour  $m$ . Alors,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial X_1}(X_1, t) &= \frac{\partial}{\partial X_1} \left( X_1 + \int_0^t v(\Phi_m(X_1, s)) ds \right) \\ &= I_n + \int_0^t Dv(\Phi_m(X_1, s)) \frac{\partial \Phi_m}{\partial X_1}(X_1, s) ds \\ &= I_n + \int_0^t Dv(\Phi_m(X_1, s)) \Psi_m(X_1, s) ds \\ &= \Psi_{m+1}(X_1, t). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Il faut montrer que la suite  $\Psi_m$  converge vers  $\Psi$  (exercice). Alors, puisque la suite des dérivées  $\frac{\partial \Phi_m}{\partial X_1}$  des  $\Phi_m$  converge vers une fonction  $\Psi$ , et puisque  $\Phi_m$  converge vers  $\Phi$ , nécessairement  $\Psi = \frac{\partial \Phi}{\partial X_1}$ .

Montrons maintenant que  $\Phi(X_1, t)$  est de classe  $C^r$ . Commençons par la différentiabilité en  $t$ . Pour cela, on regarde l'équation (1.7). Comme  $\Phi(X_1, t)$  est de classe  $C^1$ , si  $v$  est de classe  $C^1$ , le côté droit est 2 fois différentiable en  $t$ . Donc, il en est de même du côté gauche. Par suite, si  $v$  est de classe  $C^3$ , le côté droit est 3 fois différentiable en  $t$ . Donc, il en est de même du côté gauche. Etc. Pour les dérivées mixtes le raisonnement est analogue.

Pour la différentiabilité en  $X_1$  on joue le même jeu, mais en regardant simultanément les équations (1.7) et (1.10). On a montré que  $\Psi$  est de classe  $C^1$  en  $X_1$ , donc  $\Phi$  est de classe  $C^2$  en  $X_1$ . En appliquant le théorème en classe  $C^2$  à l'équation aux variations, on obtient que  $\Psi$  est de classe  $C^2$  en  $X_1$ , donc  $\Phi$  est de classe  $C^3$  en  $X_1$ . Etc.

Dans le cas analytique, il est plus simple d'utiliser des méthodes analytiques directes que d'essayer de montrer la convergence de la série de Taylor qu'on pourrait obtenir par la méthode précédente.  $\square$

### 1.3.1 L'application du flot

Le théorème précédent nous fournit un outil très utile : *l'application du flot*.

**THÉORÈME 1.6** *On considère un champ de vecteurs  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^r$  et  $X_0 \in U$ . Il existe  $\delta > 0$ ,  $\epsilon > 0$  et une famille d'applications  $\{\Phi^t\}_{t \in ]-\epsilon, \epsilon[}$  de classe  $C^r$  définie sur  $\{X \in U; |X - X_0| < \delta\}$  tels que ;*

- $\Phi^0 = \text{id}$ ;
- pour tous  $s, t \in ]-\epsilon, \epsilon[$  tels que  $s + t \in ]-\epsilon, \epsilon[$ ,  $\Phi^s \circ \Phi^t = \Phi^{s+t}$ ;
- pour tout  $X_1 \in U$ , la fonction  $t \mapsto \Phi^t(X_1) : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow U$  est solution de l'équation différentielle ordinaire  $\dot{X} = v(X)$  sous la condition initiale  $\Phi^0(X_1) = X_1$ . Donc,

$$\frac{d}{dt} \Phi^t(X_1) = v(\Phi^t(X_1)).$$

La famille  $\{\Phi^t\}$  est appelée le flot de l'équation différentielle ordinaire.

### 1.3.2 Dépendance des paramètres

Les solutions des équations différentielles ordinaires dépendent différentiellement des paramètres.

**THÉORÈME 1.7** *On considère un champ de vecteurs  $v_\lambda : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$  défini sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^n$  et dépendant d'un multi-paramètre  $\lambda$  défini sur un ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^m$ , de classe  $C^r$  en  $(X, \lambda)$ , et  $(X_0, \lambda_0) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ . Il existe  $\delta > 0$ ,  $\eta > 0$  et  $\epsilon > 0$  et une fonction  $\Phi(X, \lambda, t)$  de classe  $C^r$  définie sur  $\{X \in \mathcal{U}; |X - X_0| < \delta\} \times \{\lambda \in \mathcal{V}; |\lambda - \lambda_0| < \eta\} \times \{t \in ]-\epsilon, \epsilon[ \}$  tels que pour tout  $X_1 \in B(X_0, \delta)$  et pour tout  $\lambda \in B(\lambda_0, \eta)$ , la fonction  $\Phi(X_1, \lambda, \cdot) : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow \mathcal{U}$  est solution de l'équation différentielle ordinaire  $\dot{X} = v_\lambda(X)$  sous la condition initiale  $\Phi(X_1, \lambda, 0) = X_1$ .*

**PREUVE** On regarde le système à paramètres comme un système sur un espace de dimension  $n + m$  en introduisant les équations  $\dot{\lambda} = 0$ . On applique le théorème 1.5 au système

$$\begin{aligned} \dot{X} &= v_\lambda(X) = v(X, \lambda), \\ \dot{\lambda} &= 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

□

### 1.3.3 Théorème de redressement

**THÉORÈME 1.8** *(Théorème de redressement) On considère un champ de vecteurs  $v : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^r$  et  $X_0 \in \mathcal{U}$  tel que  $v(X_0) \neq 0$ . Il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $X_0$  et un difféomorphisme de classe  $C^r$ ,  $F : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ , où  $\mathcal{W}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , transformant l'équation différentielle ordinaire  $\dot{X} = v(X)$  en l'équation*

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 1, \\ \dot{y}_2 &= 0, \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= 0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

**PREUVE** Soit  $(P)$  l'hyperplan passant par  $X_0$  et perpendiculaire à  $v(X_0)$ . On prend l'origine en  $X_0$  et on introduit des coordonnées  $(y_2, \dots, y_n)$  sur  $(P)$ . Par continuité, le champ de vecteurs est transversal à  $(P)$  sur un voisinage  $W'$  de  $X_0$  dans  $(P)$  et il existe  $\epsilon > 0$  tel que les trajectoires pour  $X_1 \in W'$  sont définies pour  $t \in ]-\epsilon, \epsilon[$ . On va définir  $F^{-1} : W = W' \times ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow \mathcal{U}$ . Soit  $g(y_2, \dots, y_n)$  le point de  $W' \subset (P)$  de coordonnées  $(y_2, \dots, y_n)$ . On pose

$$F^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \Phi^{y_1}(g(y_2, \dots, y_n)).$$

Cette application transforme la solution de l'équation différentielle (1.13) passant par  $(0, y_2, \dots, y_n)$  en la solution de l'équation différentielle ordinaire  $\dot{X} = v(X)$  passant par  $g(y_2, \dots, y_n)$ . Pour montrer que  $F^{-1}$  est inversible sur un voisinage de 0, il suffit, par le théorème des fonctions inverses, de montrer que

sa matrice jacobienne en 0 est inversible. La première colonne de  $D(F^{-1})(0)$  est donnée par  $v(X_0)$ . La colonne  $i$  est donnée par un vecteur de  $(P)$  tangent à la direction  $y_i$ . Comme les colonnes de la matrice sont linéairement indépendantes,  $D(F^{-1})(0)$  est inversible et donc,  $F$  est un difféomorphisme d'un voisinage de  $X_0$  sur un voisinage de 0.

Soit  $G = F^{-1}$ . Vérifions que le changement  $X = G(Y)$  transforme bien l'EDO  $\dot{Y} = e_1$  en l'EDO  $\dot{X} = v(X)$ . On a

$$\dot{X} = DG(G^{-1}(X))e_1 = v(G^{-1}(\Phi^{y_1}(g(y_2, \dots, y_n)))) = v(X),$$

puisque le produit matriciel  $DG(G^{-1}(X))e_1$  est donné par la première colonne de  $DG(G^{-1}(X))$ , soit la dérivée partielle par rapport à  $y_1$  de  $\Phi^{y_1}(g(y_2, \dots, y_n))$ ,  $\square$

Le théorème de redressement (appelé "flow-box theorem" en anglais) donne la classification locale des champs de vecteurs de classe  $C^r$  au voisinage d'un point non singulier. Pour compléter la classification locale, il suffit donc d'étudier le voisinage des points singuliers. En soi, c'est un programme immense qui est loin d'être complété en toute généralité.

### 1.3.4 Prolongement des solutions

On a vu qu'on peut construire une solution d'une équation différentielle ordinaire pour des valeurs du temps dans un intervalle  $[-\epsilon, \epsilon]$ . Peut-on prolonger la solution pour des valeurs de  $t$  en dehors de cet intervalle? Pas toujours. Mais l'obstruction est d'un seul type : on sort du domaine de l'équation différentielle ordinaire en un temps fini. Nous énonçons sans preuve le théorème suivant.

**THÉORÈME 1.9** *On considère une équation différentielle ordinaire  $\dot{X} = v(X)$  de classe  $C^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $X_0 \in U$  et  $\Phi^t(X_0)$ ,  $t \in J$ , la solution de condition initiale  $\Phi^0(X_0) = X_0$  sur un intervalle ouvert maximal  $J = (\alpha, \beta)$  qui est un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}$ . Supposons que  $J$  n'est pas égal à  $\mathbb{R}$ . Soit  $K$  un compact inclus dans  $U$ . Alors,*

- soit  $-\infty < \alpha < 0$ . Dans ce cas, il existe  $t \in ]\alpha, 0[$  tel que  $\Phi^t(X_0) \notin K$ ;
- ou  $0 < \beta < \infty$ . Dans ce cas, il existe  $t \in ]0, \beta[$  tel que  $\Phi^t(X_0) \notin K$ . En particulier, soit  $|\Phi^t(X_0)|$  devient non borné, ou  $\Phi^t(X_0)$  s'approche de la frontière de  $U$  lorsque  $t \rightarrow \beta$ .

**EXEMPLE 1.10** *Considérons l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$*

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = x^2.$$

*Comme elle est à variables séparables on peut l'intégrer explicitement et on obtient*

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = t,$$



ce qui donne

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t},$$

et on voit que, pour  $x_0 > 0$ ,  $x(t) \rightarrow \infty$  lorsque  $t \rightarrow \frac{1}{x_0}$ . La solution passe donc à l'infini en temps fini.

## 1.4 Rappel sur les systèmes linéaires

Dans cette section nous rappelons les principaux résultats sur les systèmes d'équations différentiels linéaires à matrice constante de la forme

$$\dot{X} = AX,$$

où  $A$  est une matrice  $n \times n$  à coefficients réels et  $X \in \mathbb{R}^n$ . Il sera parfois utile de considérer l'extension  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$  qui permet d'étendre le système à  $\mathbb{C}^n$  et de permettre des changements de coordonnées qui ne préservent pas le caractère réel de la matrice.

L'importance des systèmes linéaires est qu'ils constituent une première approximation d'un système non linéaire au voisinage d'un point singulier.

EXEMPLE 1.11 Pour  $n = 1$ , l'équation différentielle  $\dot{x} = ax$  a pour solution  $x(t) = e^{at}x_0$  sous la condition initiale  $x(0) = x_0$ .

Ceci suggère que la solution du système  $\dot{X} = AX$  sous la condition initiale  $X(0) = X_0$  est donnée par  $X(t) = e^{At}X_0$ . C'est effectivement le cas, et il nous faut donc définir l'exponentielle d'une matrice carrée  $B$ .

DÉFINITION 1.12 Étant donnée une matrice carrée  $B$ ,  $n \times n$ , l'exponentielle de la matrice  $B$ , notée  $e^B$ , est donnée par la somme de la série convergente suivante

$$e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!},$$

où  $B^0 = I_n$  est la matrice identité.

Lorsqu'on traite de la convergence de suites de matrices on utilise la norme suivante

DÉFINITION 1.13 La norme d'une matrice  $B$ ,  $n \times n$ , à entrées réelles, notée  $\|B\|$ , est

$$\|B\| = \max_{X \in \mathbb{S}^{n-1}} |BX|,$$

soit le maximum des normes des valeurs  $BX$  pour  $X$  sur la sphère unité

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{X \in \mathbb{R}^n; |X| = 1\}.$$

Si on permet aux entrées de  $B$  d'être complexes, alors on définit la sphère complexe de dimension  $n - 1$  comme

$$\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1} = \{X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^n |x_j|^2 = 1\}.$$

On a alors

$$\|B\|_{\mathbb{C}} = \max_{X \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1}} |BX|.$$

PROPOSITION 1.14 La norme d'une matrice carrée  $n \times n$  satisfait aux propriétés suivantes :

- Si  $A$  est une matrice  $n \times n$ , alors  $\|A\| \geq 0$ .
- Si  $A$  est une matrice  $n \times n$ , alors  $\|A\| = 0$  si et seulement si  $A = 0$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices  $n \times n$ , alors  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .
- Si  $A$  est une matrice  $n \times n$  et  $X \in \mathbb{R}^n$  (ou  $X \in \mathbb{C}^n$ ), alors  $|AX| \leq \|A\| |X|$ .

En utilisant ces propriétés on peut montrer facilement que la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}$  définissant  $e^B$  est convergente. (Exercice)

Le calcul de  $e^B$  se fait aisément si on utilise la forme de Jordan de  $B$ .

PROPOSITION 1.15 1. Soit  $J$  un bloc de Jordan  $k \times k$  de la forme

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

2. Si  $A$  est une matrice  $n \times n$  de la forme

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_r \end{pmatrix},$$

où  $B_j$  est une matrice  $m_j \times m_j$  et  $m_1 + \dots + m_r = n$ , alors

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{B_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{B_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{B_r} \end{pmatrix}.$$

Ceci couvre le cas d'une matrice diagonale ( $m_j = 1$  pour tout  $j$ ).

3. Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  et  $S$  une matrice inversible telle que  $SAS^{-1} = J$ , où  $J$  est une matrice de Jordan. ( $S$  est la matrice de changement de base vers la base dans laquelle la matrice de l'opérateur  $X \mapsto AX$  est la matrice de Jordan  $J$ .) Alors,

$$e^A = S^{-1}e^J S.$$

4. Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  à entrées réelles et  $J$  sa matrice de Jordan. Si  $J$  a un bloc de Jordan

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

correspondant à une valeur propre  $\lambda$  non réelle, alors il a aussi le bloc de Jordan conjugué

$$J_2 = \bar{J}_1 = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Soit  $\lambda = a + ib$ . Par un changement de base on transforme la matrice complexe  $A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$  en la matrice réelle

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

5. Soit  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ . Alors,

$$e^A = \begin{pmatrix} e^a \cos b & -e^a \sin b \\ e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix}.$$

Une des raisons pour lesquelles on a rappelé les principaux résultats sur les systèmes linéaires est qu'ils servent de modèle pour l'organisation des trajectoires au voisinage d'un point singulier, au moins dans le cas où toutes les valeurs propres ont des parties réelles non nulles.

## 1.5 Un critère pour la stabilité asymptotique d'un point singulier

**DÉFINITION 1.16** Un point singulier  $X_0$  d'un champ de vecteurs  $\dot{X} = v(X)$  défini sur un ouvert  $U$  est asymptotiquement stable s'il existe un voisinage  $V$  de  $X_0$  tel que, pour tout  $X_1 \in V$  alors,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(X_1) = X_0$ .

### 1.5.1 Le cas linéaire

**THÉORÈME 1.17** *On considère le système linéaire  $\dot{X} = AX$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Si toutes les valeurs propres de  $A$  ont des parties réelles négatives, alors l'origine est asymptotiquement stable.*

**PREUVE** On peut bien sûr changer de base pour amener la matrice  $A$  à une forme plus simple  $A'$ . Si on pose  $Y = SX$ , alors on a  $\dot{Y} = SAS^{-1}Y$  et donc  $A' = SAS^{-1}$ . Dans tous les cas, la méthode sera la suivante : dans la base considérée, on va regarder la fonction

$$F(Y) = y_1^2 + \dots + y_n^2.$$

Calculons la dérivée de  $F$  le long d'une trajectoire  $Y(t)$ . Cette dérivée vaut

$$\frac{dF(Y(t))}{dt} = \nabla F(Y(t)) \cdot A'Y(t) = \langle 2Y(t), A'Y(t) \rangle.$$

Puisque toutes les valeurs propres de  $A$  ont des parties réelles négatives et que  $A$  et  $A'$  ont les mêmes valeurs propres, on pourra choisir  $S$  pour que  $\frac{dF(Y(t))}{dt}$  que l'on notera simplement  $\dot{F}$  satisfasse

$$-C_2|Y|^2 \leq \dot{F} \leq -C_1|Y|^2, \quad (1.14)$$

pour des constantes  $C_j > 0$ . Ceci montre que  $F$  décroît le long des trajectoires. Mais cela ne suffit pas. Il faut voir que  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(Y(t)) = 0$ . Pour cela on regarde  $G(Y) = \ln Y$ . Alors  $-C_2 \leq \dot{G} \leq -C_1$ . Donc,  $G(t) \leq e^{-C_1 t} \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Il suffit donc de bien choisir la base (et donc  $S$ ) pour que (1.14) soit vérifiée. On va regarder plusieurs cas.

(0) Il est aisé de se convaincre que si  $A$  est une matrice  $n \times n$  de la forme

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_r \end{pmatrix},$$

où  $B_j$  est une matrice  $m_j \times m_j$  et  $m_1 + \dots + m_r = n$ , alors les valeurs propres de chacune des matrices  $B_j$  ont des parties réelles négatives. Le système a la forme d'un produit

$$\dot{X}_j = B_j X_j, \quad j = 1, \dots, r.$$

La solution du système est de la forme

$$X(t) = (X_1(t), \dots, X_r(t))$$

et on aura  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = 0$  dès que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_j(t) = 0$  pour tout  $j$ .

(i) Le cas  $A$  diagonalisable à valeurs propres réelles : on prend  $S$  telle que  $SAS^{-1}$  est diagonale.

- (ii) Le cas  $A$  diagonalisable à valeurs propres complexes. Sans perte de généralité on va supposer  $A$  diagonale. Chaque fois que  $\lambda \notin \mathbb{R}$  est valeur propre c'est aussi le cas de  $\bar{\lambda}$ . Considérons un sous-bloc  $A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$ . On peut supposer  $\lambda = a + ib$ , où  $a < 0$ . On va prendre la matrice  $S_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ . Alors,

$$A' = S_1 A_1 S_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2} & -\frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2i} \\ \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2i} & \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \dot{F} = 2a(y_1^2 + y_2^2).$$

- (iii) Le cas d'un bloc de Jordan  $n \times n$  à valeur propre réelle négative

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Soit  $\epsilon > 0$ . On considère  $J' = SJS^{-1}$ , où  $S$  est la matrice diagonale

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\epsilon} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon^n} \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$J' = \begin{pmatrix} \lambda & \epsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \epsilon & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Soit  $F(Y) = \sum_{i=1}^n y_i^2$ . Alors,

$$\dot{F} = \lambda \sum_{i=1}^n y_i^2 + \epsilon \sum_{i=1}^{n-1} y_i y_{i+1}.$$

On a bien  $\dot{F} < 0$  pour  $Y \neq 0$  dès que  $\epsilon$  est assez petit (exercice).

- (iv) Le cas d'un bloc de Jordan  $J$  à valeur propre complexe. Alors, tel que décrit dans la proposition 1.15, on a aussi le bloc complexe conjugué,  $\bar{J}$ . On choisit  $\epsilon$  et une matrice  $S$  comme en (iii) et on applique le même  $S$  à  $J$  et  $\bar{J}$ . On peut ensuite repasser en coordonnées réelles. (Faire les détails comme exercice).

□

### 1.5.2 Le cas non linéaire

DÉFINITION 1.18 Pour tout champ de vecteurs  $v$  défini sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , on peut définir un opérateur de dérivation noté  $L_v$ . Étant donné une fonction  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction  $L_v(F) : U \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$L_v(F)(X) = \langle \nabla F(X), v(X) \rangle$$

et appelée dérivée de Lie de  $F$  le long de  $v$ .  $L_v(F)$  représente le  $\dot{F}$  défini plus haut.

THÉORÈME 1.19 On considère une équation différentielle ordinaire  $\dot{X} = v(X)$  donnée par un champ de vecteurs de classe  $C^1$ ,  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  et un point singulier  $X_0$  de  $v$ . Soit  $A = Dv(X_0)$  la matrice jacobienne de  $v$  en  $X_0$ . Si toutes les valeurs propres de  $A$  ont des parties réelles négatives, alors  $X_0$  est asymptotiquement stable.

PREUVE Sans perte de généralité, on peut supposer qu'on a appliqué au préalable une translation qui a ramené  $X_0$  à 0. Au voisinage de 0, le champ de vecteurs a la forme  $v(X) = AX + o(X)$ . On applique un changement linéaire de coordonnées  $Y = SX$  tel que, si  $A' = SAS^{-1}$  et  $F(Y) = \sum_{i=1}^n y_i^2$  alors, pour le système linéaire  $\dot{Y} = A'Y = w_{A'}$ , on a  $L_{w_{A'}} = Q(Y)$ , où  $Q$  est une forme quadratique définie négative. Donc, il existe  $\delta > 0$  tel que  $Q(Y) \leq -\delta|Y|^2$ . Regardons maintenant la dérivée de Lie de  $F$  le long du champ  $v$  :

$$L_v(F) = Q(Y) + o(|Y|^2) \leq -\delta|Y|^2 + o(|Y|^2).$$

Il existe donc  $\epsilon > 0$  et  $\delta'$  tels que  $L_v(F) < -\delta'|Y|^2$  pour  $|Y| < \epsilon$  et on conclut à la stabilité asymptotique comme au théorème 1.17.  $\square$

EXEMPLE 1.20 On considère le système de Lorenz

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz, \\ \dot{z} &= -\beta z + xy, \end{aligned} \tag{1.15}$$

dépendant des trois paramètres positifs  $\rho, \sigma, \beta$ . Cherchons les points singuliers. La première équation donne  $x = y$  et la troisième  $z = x^2/\beta$ . En remplaçant dans la seconde on obtient  $(\rho - 1)x - x^3/\beta = x(\rho - 1 - x^2/\beta)$ . Donc, on a toujours la solution  $(0, 0, 0)$  et, pour  $\rho > 1$  on a les deux autres points singuliers

$$P_+ = \left( \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1 \right), P_- = \left( -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1 \right).$$

Remarquons que les trois points singuliers sont confondus pour  $\rho = 1$ . Étudions maintenant la stabilité de l'origine. La matrice jacobienne est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne en  $(0, 0, 0)$  vaut donc

$$A(0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix},$$

dont le polynôme caractéristique  $\det(\lambda I - A(0))$  est donné par

$$(\lambda + \beta)(\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - \rho)).$$

Alors, les valeurs propres sont  $-\beta$  et les deux racines de

$$q(\lambda) = \lambda^2 - (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - \rho).$$

Ces deux racines sont réelles de signe contraire si  $1 - \rho < 0$ , c'est-à-dire  $\rho > 1$ . Dans ce cas, l'origine est instable puisqu'on a deux valeurs propres négatives et une valeur propre positive. Si  $\rho < 1$ , le produit des racines de  $q$  est positif et la somme des racines est  $-\sigma - 1 < 0$ . Donc, on a soit deux racines réelles négatives, soit deux racines complexes de partie réelle négative. Dans tous les cas, l'origine est asymptotiquement stable. Si  $\rho = 1$  on a une valeur propre nulle et on ne peut conclure.

Étudions maintenant la stabilité des points singuliers  $P_{\pm}$ . La matrice jacobienne en ces points est donnée par

$$A(P_{\pm}) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \pm\sqrt{\beta(\rho-1)} & \pm\sqrt{\beta(\rho-1)} & -\beta \end{pmatrix}.$$

dont le polynôme caractéristique  $\det(\lambda I - A(P_{\pm}))$  est donné par

$$\lambda^3 + \lambda^2(1 + \sigma + \beta) + \lambda\beta(\sigma + \rho) + 2\beta\sigma(\rho - 1).$$

Ce polynôme est de la forme  $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ . Nous allons montrer au lemme 1.21 que les trois racines ont des parties réelles négatives sous les conditions  $a > 0$ ,  $c > 0$  et  $ab - c > 0$ . Les deux premières conditions sont vérifiées pour  $\rho > 1$ . De plus

$$\begin{aligned} ab - c &= \beta(1 + \sigma + \beta)(\sigma + \rho) - 2\beta\sigma(\rho - 1) \\ &= \beta[-\rho(\sigma - \beta - 1) + \sigma(3 + \sigma + \beta)]. \end{aligned}$$

On voit que si  $\sigma - \beta - 1 > 0$ , les points  $P_{\pm}$  sont asymptotiquement stables pour

$$\rho < \rho_H = \frac{\sigma(3 + \sigma + \beta)}{\sigma - \beta - 1}.$$

Le système de Lorenz est en général étudié pour  $\sigma = 10$  et  $\rho = \frac{8}{3}$ . Pour ces valeurs,  $\sigma - \beta - 1 > 0$  et  $\rho_H \sim 24,74..$

**LEMME 1.21** (Critère de Routh-Hurwitz) Le polynôme  $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  a trois racines de partie réelle négative sous les conditions,  $c > 0$  et  $ab - c > 0$ .

PREUVE On peut diviser l'espace  $(a, b, c)$  en régions où les signes des parties réelles des racines sont constants. En effet, les racines dépendent continûment de  $a, b, c$ . Il n'y a que deux manières dont le signe des racines peut changer.

- Une racine s'annule : ceci se produit si  $c = 0$ ;
- deux racines traversent l'axe imaginaire. Le polynôme  $p$  a toujours une racine réelle  $x_1$ . Soit  $x_{2,3} = \pm i\omega$  les deux racines imaginaires pures. On a  $x_1 + x_2 + x_3 = -a$ . Or,  $x_1 + x_2 + x_3 = -a = x_1$ . Donc,  $-a$  est racine de  $p$ , c'est-à-dire

$$p(-a) = (-a)^3 + a(-a)^2 - ba + c = c - ba = 0.$$

Cependant, sur la surface  $c = ab$ , il faut éliminer le cas de deux valeurs propres réelles opposées. On a  $p(x)|_{c=ab} = (x+a)(x^2+b)$ . Pour  $b < 0$ , on a donc trois racines réelles et aucune racine ne traverse l'axe imaginaire. Donc, seule la portion de la surface  $c = ab$  correspondant à  $b > 0$  est pertinente.

La surface  $c = 0$  et la demi-surface  $c = ab, b > 0$  divisent l'espace en 4 régions ouvertes (faire le dessin) et dans chacune il suffit de prendre un point pour voir quel est le signe des parties réelles des racines de  $p(x)$  :

- la région  $R_1 = \{(a, b, c) \mid c > 0, c < ab, a, b > 0\}$  : les trois racines ont des parties réelles négatives ;
- la région  $R_2 = \{(a, b, c) \mid c > 0\} \setminus R_1$  : une racine a une partie réelle négative et deux racines ont des parties réelles positives ;
- la région  $R_3 = \{(a, b, c) \mid c < 0, c > ab, a < 0, b > 0\}$  : les trois racines ont des parties réelles positives ;
- la région  $R_4 = \{(a, b, c) \mid c < 0\} \setminus R_3$  : une racine a une partie réelle positive et deux racines ont des parties réelles négatives.

□

## 1.6 Ensembles $\alpha$ -limite et $\omega$ -limite d'une trajectoire. Ensembles invariants

DÉFINITION 1.22 On se donne un champ de vecteurs  $v(X)$  de classe  $C^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $X_0 \in U$  et sa trajectoire  $X(t, X_0) = \phi^t(X_0)$ .

1. L'ensemble  $\alpha$ -limite de la trajectoire de  $X_0$  est l'ensemble (s'il existe) des points  $X_1$  tels qu'il existe une suite  $t_n \rightarrow -\infty$  pour laquelle  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{t_n}(X_0) = X_1$ .
2. L'ensemble  $\omega$ -limite de la trajectoire de  $X_0$  est l'ensemble (s'il existe) des points  $X_2$  tels qu'il existe une suite  $t_n \rightarrow +\infty$  pour laquelle  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{t_n}(X_0) = X_2$ .

EXEMPLE 1.23 L'ensemble  $\alpha$ -limite ou  $\omega$ -limite d'une trajectoire peut être un point singulier, un cycle limite, un ensemble de points singuliers et de trajectoires les joignant.

DÉFINITION 1.24 On se donne un champ de vecteurs  $v(X)$  de classe  $C^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ .



Un sous ensemble  $M$  de  $U$  est positivement (resp. négativement) invariant si pour tout  $X_0 \in M$ , la trajectoire positive de  $X_0$ , soit l'ensemble des points  $\{\phi^t(X_0) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$  est incluse dans  $M$ .

1. Un sous ensemble  $M$  de  $U$  est invariant s'il est positivement et négativement invariant.

#### THÉORÈME 1.25

L'ensemble  $\omega$ -limite (resp.  $\alpha$ -limite) d'une trajectoire est invariant.

PREUVE. Soit  $\Gamma$  l'ensemble  $\omega$ -limite de trajectoire positive d'un point  $X_0$  et soit  $X_1 \in \Gamma$ . Soit  $T \in \mathbb{R}$ . On doit montrer que  $\phi^T(X_1) \in \Gamma$ . Il existe une suite  $t_n \in \mathbb{R}^+$ , telle que  $t_n \rightarrow +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{t_n}(X_0) = X_1$ . Comme  $t_n \rightarrow +\infty$ , il existe  $m$  tel que  $t_n > T$  pour  $n > m$ . Considérons la suite des temps  $\tau_n = t_{m+n} + T$ . On a  $\tau_n > 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n \rightarrow +\infty$ . Alors,

$$\phi^{\tau_n}(X_0) = \phi^T(\phi^{t_{m+n}}(X_0)) \rightarrow \phi^T(X_1).$$

Donc,  $\phi^T(X_1) \in \Gamma$ . □

## 1.7 Existence de variétés stables et instables d'un point de selle hyperbolique

Les variétés différentiables sont des espaces topologiques munis d'une structure différentiable et étudiés en géométrie différentielle. Des exemples de base sont donnés par

- un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  qui est une variété de dimension  $n$  ;
- la sphère  $\mathbb{S}^n$  qui est une variété de dimension  $n$ . Si l'on veut la décrire, indépendamment de l'espace ambiant  $\mathbb{R}^{n+1}$  où elle est plongée, on se donne un atlas de cartes. Chaque carte représente un ouvert sur la sphère et on décrit le recollement de deux cartes qui ont une intersection non vide ;
- le tore est une variété de dimension 2 ;
- une courbe, surface ou hypersurface différentiable dans  $\mathbb{R}^n$  est une variété différentiable. Comme elle est plongée dans  $\mathbb{R}^n$ , c'est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ .

Nous allons nous limiter aux sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ . Les variétés stables et instables d'un point de selle hyperbolique seront des sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ , mais nous allons utiliser le terme « variété » pour être en phase avec la littérature.

DÉFINITION 1.26 Une sous-variété de classe  $C^r$  (resp.  $C^\infty$ ,  $C^\omega$ ) de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^n$  est un sous-ensemble  $W$  de  $\mathbb{R}^n$ , tel que pour tout  $X_0 \in W$ , il existe un voisinage  $U$  de  $X_0$  et une fonction  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  de classe  $C^r$  (resp.  $C^\infty$ ,  $C^\omega$ ) et de rang maximum (c'est-à-dire qu'en tout point  $X$  le rang de la transformation linéaire  $DF(X)$  est  $n - k$ ) tels que, pour tout  $X \in U$ , alors  $X \in W$  si et seulement si  $F(X) = 0$ .

PROPOSITION 1.27 Soit  $W$  une sous-variété de classe  $C^r$  (resp.  $C^\infty, C^\omega$ ) de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^n$ . Alors, pour tout  $X_0 \in W$ , il existe un voisinage  $U$  de  $X_0$ , un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^k$  et une fonction  $G : V \rightarrow U$  de classe  $C^r$  (resp.  $C^\infty, C^\omega$ ) tels que, pour tout  $X' \in U$ , alors  $X \in W$  si et seulement si il existe  $Y \in V$  tel que  $X = G(Y)$ .

PREUVE En  $X_0$ , l'hypothèse que  $F$  est de rang maximum permet d'appliquer le théorème des fonctions implicites. Si  $F = (F_1, \dots, F_{n-k})$  il existe des indices  $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-k}$  tels que la matrice  $A = (a_{ij_\ell})_{i,\ell=1,\dots,n-k}$ , où  $a_{ij_\ell} = \frac{\partial F_i}{\partial x_{j_\ell}}$ , est inversible. Soit  $s_1 < s_2 < \dots < s_k$  les indices différents des  $j_\ell$  précédemment définis. Le théorème des fonctions implicites donne l'existence de  $U, V$  et d'une fonction  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  tels que si  $X = (x_1, \dots, x_n) \in U$ , alors  $F(X) = 0$  si et seulement si  $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}) = g(x_{s_1}, \dots, x_{s_k})$ . On passe de  $g$  à  $G$  en rajoutant les coordonnées  $x_{s_1}, \dots, x_{s_k}$ .  $\square$

Les preuves de l'existence des variétés stables et instables en classe  $C^r$  ou  $C^\infty$  sont assez longues et techniques. En classe analytique  $C^\omega$ , la preuve est assez courte (voir par exemple [1]). Par contre, elle est faite pour des champs sur des ouverts de  $\mathbb{C}^n$  et il faut ensuite vérifier le « caractère réel » des variétés obtenues.

THÉORÈME 1.28 On considère une EDO,  $\dot{x} = v(x)$ , de classe  $C^r$  (resp.  $C^\infty, C^\omega$ ) sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $X_0$  un point singulier hyperbolique de type selle avec  $k$  (resp.  $n-k$ ) valeurs propres à partie réelle négative (resp. positive). On peut supposer que la matrice  $A$  du linéarisé en  $X_0$  a la forme  $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ , où les valeurs propres de  $B$  (resp.  $C$ ) ont des parties réelles négatives (resp. positives). Soit  $E^s$  et  $E^u$  les sous-espaces propres associés à  $B$  et  $C$ . Alors, dans un voisinage de  $X_0$ , il existe une unique variété stable (resp. instable)  $W^s$  (resp.  $W^u$ ) de dimension  $k$  (resp.  $n-k$ ) tangente au sous-espace  $E^s$  (resp.  $E^u$ ) et invariante sous le flot. On a donc

$$\begin{aligned} - \forall t, \phi^t(W^s) &\subset W^s \text{ et, } \forall X \in W^s, \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(X) = X_0; \\ - \forall t, \phi^t(W^u) &\subset W^u \text{ et, } \forall X \in W^u, \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^t(X) = X_0. \end{aligned}$$

SCHÉMA DE LA PREUVE Sans perte de généralité, on peut supposer que  $X_0 = 0$ . Il suffit de faire la preuve de l'existence de  $W^s$ . La variété  $W^u$  est alors la variété stable de l'EDO  $\dot{x} = -v(x)$ . On écrit

$$v(X) = AX + f(X), \quad f(0) = 0, \quad Df(0) = 0, \quad f(X) = o(|X|).$$

Comme le théorème est local, on peut remplacer le champ  $v(X)$  par un champ  $w(X) = AX + f(X)\varphi(X)$ , où  $\varphi$  est une fonction  $C^\infty$  qui prend des valeurs dans  $[0, 1]$ , est identiquement égale à 1 au voisinage de l'origine et qui s'annule en dehors d'une boule de rayon  $\delta$ . La fonction  $\varphi$  est telle que la dérivée de  $f(X)\varphi(X)$  est plus petite que  $\epsilon$  sur tout  $\mathbb{R}^n$ . Un avantage de cette transformation est que les trajectoires de  $w(X)$  se prolongent indéfiniment. On va garder la notation  $v(X)$ , plutôt que  $w(X)$  pour le nouveau champ.

On cherche la variété  $W^s$  sous la forme d'un graphe

$$x_j = \psi_j(x_1, \dots, x_k), \quad j = k+1, \dots, n.$$

Soit

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{Bt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{Ct} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que  $\dot{P} = AP$  et  $\dot{Q} = AQ$ . Aussi,

$$e^{At} = P(t) + Q(t).$$

Soit  $\alpha$  et  $\sigma$  tels que toutes les parties réelles des valeurs propres de  $B$  soient inférieures à  $-\alpha - 2\sigma$  et toutes les parties réelles des valeurs propres de  $C$  soient supérieures à  $2\sigma$ . Alors, il existe  $K$  tel que

$$\begin{cases} \|P(t)\| \leq Ke^{-(\alpha+\sigma)t}, & t \geq 0, \\ \|Q(t)\| \leq Ke^{\sigma t}, & t \leq 0. \end{cases}$$

Soit  $a \in \mathbb{R}^n$ . On regarde l'équation intégrale pour  $u(t, a) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} u(t, a) &= P(t)a + \int_0^t P(t-s)f(u(s, a))ds \\ &\quad - \int_t^{+\infty} Q(t-s)f(u(s, a))ds. \end{aligned} \tag{1.16}$$

On cherche une solution de cette équation qui reste bornée pour tout  $t > 0$ . Commençons par montrer que  $u(t, a)$  pour  $a$  fixé est solution de l'EDO.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= P'(t)a + P(0)f(u(t, a)) + \int_0^t P'(t-s)f(u(s, a))ds \\ &\quad + Q(0)f(u(t, a)) - \int_t^{+\infty} Q'(t-s)f(u(s, a))ds \\ &= AP(t)a + f(u(t, a)) + A \int_0^t P(t-s)f(u(s, a))ds \\ &\quad - A \int_t^{+\infty} Q(t-s)f(u(s, a))ds \\ &= Au(t, a) + f(u(t, a)) = v(u(t, a)). \end{aligned}$$

On résoud l'équation (1.16) par approximations successives

$$\begin{aligned} u^0(t, a) &\equiv 0 \\ u^{n+1}(t, a) &= P(t)a + \int_0^t P(t-s)f(u^n(s, a))ds \\ &\quad - \int_t^{+\infty} Q(t-s)f(u^n(s, a))ds. \end{aligned} \tag{1.17}$$

On montre par induction que

$$|u^{n+1}(t, a) - u^n(t, a)| \leq \frac{K|a|e^{-\alpha t}}{2^n}.$$

En effet, on a  $|u_1(t, a)| \leq Ke^{-(\alpha+\sigma)t}|a|$ . Supposons maintenant que la propriété soit vraie pour  $n-1$ . Vu que  $\|Df\| < \epsilon$ , alors  $\epsilon$  est une constante de Lipschitz pour  $f : |f(X) - f(X')| < \epsilon|X - X'|$  pour tous  $X, X'$ . Remarquons qu'on peut prendre  $\epsilon$  aussi petit que l'on veut : il suffit de prendre le  $\delta$  assez petit dans le choix de  $\varphi$ .

$$\begin{aligned}
|u^{n+1}(t, a) - u^n(t, a)| &\leq \int_0^t Ke^{-(\alpha+\sigma)(t-s)} \epsilon |u^n(s, a) - u^{n-1}(s, a)| ds \\
&\quad + \int_t^{+\infty} Ke^{\sigma(t-s)} \epsilon |u^n(s, a) - u^{n-1}(s, a)| ds \\
&\leq \frac{K^2 \epsilon e^{-(\alpha+\sigma)t} |a|}{2^{n-1}} \int_0^t e^{\sigma s} ds + \frac{K^2 \epsilon e^{\sigma t} |a|}{2^{n-1}} \int_t^{\infty} e^{-(\alpha+\sigma)s} ds \\
&\leq \frac{K^2 \epsilon |a|}{2^{n-1}} \left( e^{-(\alpha+\sigma)t} \frac{e^{\sigma t} - 1}{\sigma} + e^{\sigma t} \frac{e^{-(\sigma+\alpha)t}}{\sigma + \alpha} \right) \\
&\leq \frac{K^2 \epsilon |a|}{2^{n-1}} \left( \frac{e^{-\alpha t}}{\sigma} - \frac{e^{-(\alpha+\sigma)t}}{\sigma} + \frac{e^{-\alpha t}}{\sigma + \alpha} \right) \\
&\leq \frac{K^2 \epsilon |a|}{2^{n-1}} \left( \frac{e^{-\alpha t}}{\sigma} + \frac{e^{-\alpha t}}{\sigma + \alpha} \right) \\
&\leq \frac{K^2 \epsilon |a| e^{-\alpha t}}{2^{n-1}} \frac{2}{\sigma} \\
&= \frac{K^2 \epsilon |a| e^{-\alpha t}}{2^{n-2} \sigma} \\
&\leq \frac{K |a| e^{-\alpha t}}{2^n}
\end{aligned}$$

si  $\epsilon$  est choisi pour que  $\frac{\epsilon K}{\sigma} < \frac{1}{4}$ .

Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u^n(t, a) = u(t, a)$ , uniformément pour  $t \geq 0$ . À la limite,

$$|u(t, a)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_{n+1} - u_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K |a| e^{-\alpha t}}{2^n} = 2K |a| e^{-\alpha t}$$

et donc,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, a) = 0$ .

La propriété remarquable est que les  $(n-k)$  dernières composantes de  $a$  n'ont aucune influence sur la solution : cela vient de la construction des  $u_n$ . Donc,

$$u(t, a) = u(t, (a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0))$$

et, si  $u = (u_1, \dots, u_n)$ , alors

$$u_j(0, a) = \begin{cases} a_j, & j = 1, \dots, k, \\ -\int_0^{\infty} Q(-s) f(u(s, (a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0))) ds, & j = k+1, \dots, n. \end{cases}$$

Ceci nous fournit la définition des fonctions  $\psi_j$  :

$$\psi_j(a_1, \dots, a_k) = u_j(0, (a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0)), \quad j = k+1, \dots, n.$$

Les équations

$$x_j = \psi_j(x_1, \dots, x_k) = u_j(0, (a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0)), \quad j = k+1, \dots, n$$

définissent une variété de dimension  $k$ . De plus, si  $X(t)$  est une solution telle que  $X(0) = u(0, a) \in W^s$  pour un certain  $a$ , alors  $X(t) = u(t, a) = u(0, u(t, a))$ . Donc,  $X(t) \in W^s$  pour tout  $t > 0$ .

Il reste à montrer que les fonctions  $\psi_j$  sont de classe  $C^r$ . Cette partie demande du travail et nous la sauterons : c'est pourquoi nous avons dit que nous ne faisons qu'un schéma de la preuve.  $\square$

La preuve précédente est un peu longue. Par contre, le calcul de la série de Taylor tronquée des variétés stables et instables se fait facilement. Cette série de Taylor permet, entre autres, de connaître la concavité des variétés stables et instables au voisinage du point de selle.

EXEMPLE 1.29 On considère le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + 2x^2 - y^2, \\ \dot{y} &= x + 4xy + 2y^2. \end{aligned}$$

La matrice du point de selle à l'origine est  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  de valeurs propres  $1$  et  $-1$ . Une matrice de changement de base diagonalisant  $A$  a pour colonnes des vecteurs propres de  $A$ , soit par exemple la matrice  $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et son inverse est

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Les nouvelles coordonnées  $X_1$  sont données par  $X_1 = S^{-1}X$ . Alors, si  $X_1 = (x_1, y_1)$ , on a

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + \frac{7}{2}x_1^2 - x_1y_1 - \frac{1}{2}y_1^2, \\ \dot{y}_1 &= -y_1 + \frac{5}{2}x_1^2 + 5x_1y_1 - \frac{3}{2}y_1^2. \end{aligned}$$

La variété instable est de la forme

$$y_1 = h(x_1) = ax_1^2 + bx_1^3 + O(|x_1|^4),$$

et la variété stable de la forme

$$x_1 = k(y_1) = cy_1^2 + dy_1^3 + O(|y_1|^4).$$

Pour faire le calcul, on écrit que  $y_1 = h(x_1)$  est invariante sous le flot. Donc,

$$(\dot{y}_1)|_{y_1=h(x_1)} = (h'(x_1)\dot{x}_1)|_{y_1=h(x_1)}.$$

On évalue les deux côtés et on identifie les termes de même degré en  $x_1$  :

- **Termes de degré 2** : on obtient  $\frac{5}{2} - a = 2a$ , d'où on tire  $a = \frac{5}{6}$  ;
- **Termes de degré 3** : on obtient  $5a - b = 7a + 3b$ , d'où on tire  $b = -\frac{a}{2} = -\frac{5}{12}$ .

De même, pour la variété stable, on considère l'équation

$$(\dot{x}_1)|_{x_1=k(y_1)} = (k'(y_1)\dot{y}_1)|_{x_1=k(y_1)}.$$

On évalue les deux côtés et on identifie les termes de même degré en  $y_1$  :

- **Termes de degré 2** : on obtient  $\frac{1}{2} + c = -2c$ , d'où on tire  $c = \frac{1}{6}$  ;
- **Termes de degré 3** : on obtient  $-c + d = -3c - d = 2c + 4d$ , d'où on tire  $d = -\frac{c}{2} = -\frac{1}{12}$ .

Donc, la variété instable est de la forme

$$y_1 = \frac{5}{6}x_1^2 - \frac{5}{12}x_1^3 + O(x_1^4),$$

et la variété stable est de la forme

$$x_1 = \frac{1}{6}y_1^2 - \frac{1}{12}y_1^3 + O(y_1^4).$$

EXEMPLE 1.30 On va revenir sur le système de Lorenz et calculer en première approximation la variété stable et instable du point de selle à l'origine quand  $\rho > 1$ . Le système a la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \end{pmatrix}.$$

On doit changer de variables pour diagonaliser la matrice. Soit

$$D = \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho}.$$

Une matrice de changement de base est

$$S = \begin{pmatrix} \sigma & \sigma & 0 \\ \frac{\sigma-1+D}{2} & \frac{\sigma-1-D}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'inverse

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma-1-D}{2\sigma D} & \frac{1}{D} & 0 \\ \frac{\sigma-1+D}{2\sigma D} & -\frac{1}{D} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le changement  $X_1 = S^{-1}X$  transforme le système en

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{-(\sigma+1)+D}{2}x_1 - \frac{\sigma}{D}(x_1+y_1)z_1, \\ \dot{y}_1 &= \frac{-(\sigma+1)-D}{2}y_1 + \frac{\sigma}{D}(x_1+y_1)z_1, \\ \dot{z}_1 &= -\beta z_1 + \frac{1}{2}\sigma(\sigma-1+D)x_1^2 + \sigma(\sigma-1)x_1y_1 + \frac{1}{2}\sigma(\sigma-1-D)y_1^2. \end{aligned}$$

La variété stable est tangente au plan  $(y_1, z_1)$ . Elle est donc de la forme

$$x_1 = h(y_1, z_1) = ay_1^2 + by_1z_1 + cz_1^2 + O(\|(y_1, z_1)\|^3).$$

La variété instable est tangente à l'axe  $x_1$  et de la forme

$$(y_1, z_1) = (k_1(x_1), k_2(x_1)) = (dx_1^2 + O(x_1^3), ex_1^2 + O(x_1^3)).$$

On les calcule comme précédemment. Le calcul donne  $a = c = d = 0$ ,

$$b = \frac{\sigma}{D(\beta + D)}, \quad e = \frac{\sigma(D + \sigma - 1)}{2(D + \beta - \sigma - 1)}.$$





# Bibliographie

- [1] Y. Ilyashenko et S. Yakovenko, *Lectures on analytic differential equations*, Graduate studies in Mathematics, Volume 86, American Mathematical Society (2008).



## Chapitre 2

# Théorie de la stabilité de Lyapunov

### 2.1 Introduction

Nous avons vu qu'un point singulier pour lequel la matrice du linéarisé a des valeurs propres à partie réelle négative est asymptotiquement stable. Si certaines des valeurs propres ont des parties réelles positives, le point est instable. Mais qu'en est-il dans les autres cas ? Beaucoup de situations peuvent se produire et il n'existe pas de méthode générale permettant de conclure dans tous les cas, mais plutôt un certain nombre de méthodes ad hoc. La méthode de Lyapunov en est une. Elle est très importante parce qu'elle permet de conclure dans plusieurs cas où les autres méthodes ne fonctionnent pas. De plus, elle permet d'évaluer la taille du bassin d'attraction d'une singularité, ce que ne permet pas le critère du signe des parties réelles des valeurs propres. L'idée géométrique est très simple. Commençons par quelques définitions.

- DÉFINITION 2.1
1. Un point singulier  $X_0$  d'un champ de vecteurs  $\dot{X} = v(X)$  défini sur un ouvert  $U$  est stable si, pour tout voisinage  $V$  de  $x_0$ , il existe un voisinage  $W$  de  $x_0$  tel que si  $X_1 \in W$ , alors  $\phi^t(X_1) = X(X_1, t) \in V$  pour  $t \geq 0$ .
  2. Un point singulier  $X_0$  d'un champ de vecteurs  $\dot{X} = v(X)$  défini sur un ouvert  $U$  est asymptotiquement stable s'il existe un voisinage  $V$  de  $X_0$  tel que, pour tout  $X_1 \in V$  alors,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(X_1) = X_0$ .
  3. Soit  $X_0$  un point singulier asymptotiquement stable d'un champ de vecteurs  $v(X)$  défini sur un domaine  $U$ . Le bassin d'attraction de  $X_0$  est l'ensemble des points  $X_1 \in U$  tels que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(X_1) = X_0$ .

EXEMPLE 2.2 *L'origine dans le système*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x,\end{aligned}$$

est stable. En effet,  $\dot{r} = 0$ . Donc, si on prend  $V = W = B(0, r)$ , toute trajectoire issue de  $x_1 \in W$  reste toujours dans  $V$ . Par contre les trajectoires sont incluses dans des cercles centrés en 0. Le point n'est donc pas asymptotiquement stable.

### 1. L'origine dans le système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x - y(x^2 + y^2),\end{aligned}$$

est asymptotiquement stable. En effet, il est aisé de vérifier que  $\dot{r} = -r^3$ . Dans ce cas-ci on peut intégrer explicitement  $\dot{r} = -r^3$  et vérifier que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r = 0$ . Ceci, c'est l'approche analytique. Il y a une deuxième manière, plus géométrique de conclure. Cette deuxième se généralisera en la méthode de Lyapunov.

Considérons la fonction  $F(x, y) = x^2 + y^2 = r^2$ . Ses courbes de niveau sont des cercles concentriques autour de l'origine. Regardons comment est dirigé le champ en un point d'une telle courbe. On voit qu'il est dirigé vers l'intérieur de la courbe. En effet, considérons  $\frac{d}{dt}F(x(t), y(t))$ . Par la règle de dérivation en chaîne,

$$\frac{d}{dt}F(x(t), y(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} = -r^4 < 0$$

partout, sauf à l'origine. Donc, le champ est dirigé dans la direction dans laquelle  $F$  décroît, c'est-à-dire vers l'intérieur de la courbe.

Cette approche géométrique nous a évité d'intégrer une équation différentielle. Aussi, on voit que l'expression exacte de la fonction  $F(x, y)$  n'a pas d'importance tant que ses courbes de niveau sont concentriques autour de l'origine. De plus, l'idée peut fonctionner en dimension supérieure. Cette approche est précisément la méthode de Lyapunov.

**THÉORÈME 2.3** On considère un champ de vecteurs  $v(X)$  de classe  $C^1$  défini sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $X_0$  un point singulier de  $v$ . Soit  $V$  un voisinage de  $X_0$  et  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  telle que

- $F$  ait un minimum local strict en  $X_0$ ;
- $\dot{F} = \langle \nabla F(X), v(X) \rangle \leq 0$  pour tout  $X \in V$ .

Alors,  $X_0$  est stable. Si, de plus  $\dot{F} < 0$  pour  $X \in V \setminus \{X_0\}$ , alors  $X_0$  est asymptotiquement stable.

**PREUVE** Soit  $r$  tel que la boule fermée  $\overline{B(X_0, r)}$  soit incluse dans  $V$  et soit  $L$  le minimum de  $F$  sur la sphère  $C(X_0, r)$ . Alors  $L > F(X_0)$ . On considère  $W = \{X \in V \mid F(X) < L\}$ . Bien sûr,  $W \subset V$ . De plus si  $X_1 \in W$ , alors  $F(\phi^t(X_1)) \leq F(X_1)$  pour tout  $t \geq 0$  puisque  $F$  décroît le long des trajectoires. Donc  $F(\phi^t(X_1)) \in W \subset V$  pour tout  $t \geq 0$ . On en conclut que  $X_0$  est stable.

Supposons maintenant qu'on ait l'hypothèse plus forte que  $\dot{F} < 0$ . Puisque l'ensemble des points  $\{\phi^t(X_1) \mid t \geq 0\}$  est borné, il contient un point d'accumulation  $X_2$ . Montrons que  $X_2 = X_0$ . En effet, il existe  $t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$  tels que  $\phi^{t_n}(X_1) \rightarrow X_2$ , où  $t_n \rightarrow \infty$ . De plus, si  $X_n = \phi^{t_n}(X_1)$ , alors la suite  $F(X_n)$  est strictement décroissante vers un minimum  $m = F(X_2)$ .

Si  $m = F(X_0)$ , alors  $X_2 = X_0$ . Sinon, considérons la trajectoire issue de  $X_2$ . Alors,  $F$  décroît le long de cette trajectoire. Donc, pour  $T > 0$ , alors  $F(\phi^T(X_2)) = m' < m = F(X_2)$ . Soit  $\epsilon < \frac{m-m'}{2}$ . Par continuité des solutions par rapport aux conditions initiales, il existe un voisinage  $W'$  de  $X_2$  tel que si  $X_3 \in W'$ , alors  $|F(\phi^T(X_3)) - F(\phi^T(X_2))| < \epsilon$ . On prend un  $x_3$  particulier de la forme  $\phi^{t_n}(X_1)$ . Alors,  $F(\phi^{T+t_n}(X_1)) < m$ . Mais, il existe  $t_m > T + t_n$ . Comme  $F$  décroît le long des trajectoires,  $F(\phi^{T+t_n}(X_1)) > F(\phi^{t_m}(X_1)) \geq m$ . Contradiction.  $\square$

La fonction  $F$  du théorème est appelée *fonction de Lyapunov*.

Comme on le voit, la méthode est puissante, mais il n'est pas toujours facile de trouver une fonction de Lyapunov. C'est une question de flair.

EXEMPLE 2.4 *Considérons le champ*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x^3 - x^2y.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Si l'on exclut le terme  $x^2y$  on a un système hamiltonien de fonction de Hamilton  $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4}$ . Ceci suggère de voir si cette fonction n'est pas une fonction de Lyapunov pour le système total. C'est le cas puisque

$$\dot{H} = -x^2y^2 \leq 0.$$

Donc, on peut conclure par le théorème précédent que l'origine est stable. Mais on voit bien que  $H$  ne s'annule que sur les axes et qu'ailleurs il est partout négatif. Ceci suggère qu'on peut espérer montrer que l'origine est asymptotiquement stable. Le théorème de Lyapunov ne suffit plus, mais LaSalle a montré des raffinements plus puissants. En voici un.

## 2.2 Les raffinements de la théorie par LaSalle

THÉORÈME 2.5 *On considère un champ de vecteurs  $v(X)$  de classe  $C^1$  défini sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $K$  un sous-ensemble compact positivement invariant. Soit  $V$  un ouvert contenant  $K$  et  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  telle que  $\dot{F} = \langle \nabla F(X), v(X) \rangle \leq 0$  pour tout  $X \in V$ . Soit  $E$  l'ensemble des points de  $K$  sur lequel  $\dot{F}(X) = 0$ . Soit  $M$  le plus grand sous-ensemble invariant de  $E$ . Alors toute solution commençant dans  $K$  a son ensemble  $\omega$ -limite dans  $M$ .*

Soit  $X(t) = \phi^t(X_1)$  une solution commençant en  $X_1 \in K$ . Comme  $F(X)$  est continue sur  $K$ , elle est bornée inférieurement. De plus  $F(X(t))$  est décroissante et tend donc vers une limite  $c$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . L'ensemble  $\omega$ -limite  $\Gamma$  de  $X(t)$  est contenu dans  $K$ , puisque  $K$  est fermé. Puisque  $F$  est continue, nécessairement  $F(X) = c$  sur  $\Gamma$ . De plus  $\Gamma$  est invariant. Donc,  $\dot{F} = 0$  sur  $\Gamma$  et  $\Gamma \subset M$ .  $\square$

Revenons sur l'exemple 2.4.

EXEMPLE 2.6 On considère le champ (2.1). Un sous ensemble compact positivement orienté est par exemple donné par  $K = \{(x, y) \mid H(x, y) \leq R\}$ . On a bien  $\dot{H} = -x^2y^2 \leq 0$  sur  $K$ .

$$E = \{(x, y) \in K \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\}.$$

En  $(x, 0) \neq (0, 0)$  on a  $\dot{y} = -x^3 \neq 0$ . Donc, la trajectoire issue de  $(x, 0) \in E$  n'est pas incluse dans  $E$ . De même, en  $(0, y) \neq (0, 0)$  on a  $\dot{x} = y \neq 0$ . Donc, la trajectoire issue de  $(0, y) \in E$  n'est pas incluse dans  $E$ . Donc, le plus grand sous-ensemble invariant de  $E$  est  $M = \{(0, 0)\}$ . Par le théorème de LaSalle, toute solution commençant dans  $K$  a son ensemble  $\omega$ -limite en  $(0, 0)$  et donc, l'origine est asymptotiquement stable. Remarquons que pour cet exemple, si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on peut prendre  $R > H(x, y)$  arbitrairement grand et conclure que  $(x, y)$  est dans le bassin d'attraction de l'origine. On dira que l'origine est globalement asymptotiquement stable.

EXEMPLE 2.7 On revient sur le système de Lorenz

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz, \\ \dot{z} &= -\beta z + xy,\end{aligned}\tag{2.2}$$

étudié à l'exemple 1.20. on a vu que l'origine est asymptotiquement stable pour  $\rho < 1$ , instable pour  $\rho > 1$  et on n'a pu conclure si  $\rho = 1$ . Dans le cas  $\rho < 1$  notre étude n'a pas révélé la taille du bassin d'attraction. En utilisant une fonction de Lyapunov appropriée, on pourra conclure que l'origine est globalement asymptotiquement stable pour  $\rho \neq 1$ . Essayons une fonction  $F(x, y) = ax^2 + by^2 + cz^2$  où  $a, b, c > 0$ .

$$\begin{aligned}\dot{F} &= 2ax\sigma(y - x) + 2by(\rho x - y - xz) + 2cz(-\beta z + xy) \\ &= 2[-a\sigma x^2 - by^2 - c\beta z^2 + xy(a\sigma + b\rho) + xyz(c - b)].\end{aligned}$$

On prend donc  $b = c$ . En multipliant  $F$  par une constante on peut normaliser  $a = 1$ . Alors,

$$\frac{\dot{F}}{2} = [-\sigma x^2 - by^2 + xy(\sigma + b\rho)] - b\beta z^2.$$

On doit choisir  $b$  pour que la forme quadratique  $Q(x, y) = -\sigma x^2 - by^2 + xy(\sigma + b\rho)$  soit définie positive. Il faut donc que

$$\Delta = (\sigma + b\rho)^2 - 4\sigma b < 0.$$

Voyons que le choix  $b = \sigma$  convient. En effet,

$$\Delta|_{b=\sigma} = \sigma^2[(1 + \rho)^2 - 4] = \sigma^2[\rho^2 + 2\rho - 3] = \sigma^2(\rho - 1)(\rho + 3),$$

et donc,  $\Delta|_{b=\sigma} < 0$  pour  $\rho < 1$ . En conclusion, pour  $F(x, y) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$ , on a  $\dot{F} < 0$  si  $\rho < 1$  et l'origine est asymptotiquement stable. Regardons maintenant ce qui se passe pour  $\rho = 1$ . Alors,

$$\frac{\dot{F}}{2} = -\sigma(x - y)^2 - \beta z^2 \leq 0.$$

*Le théorème de Lyapunov permet de conclure que l'origine est stable. Utilisons maintenant le théorème de LaSalle.  $E = \{(x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . Soit  $(x, x, 0) \neq (0, 0, 0)$  un point de  $E$ . Pour montrer que sa trajectoire n'est pas dans  $E$  on montre que  $\dot{z}|_{(x,x,0) \neq 0} \neq 0$ . En effet,  $\dot{z}|_{\rho=1, y=x \neq 0, z=0} = x^2 \neq 0$ . Donc,  $M = \{(0, 0, 0)\}$  est le plus grand sous-ensemble invariant de  $E$  et l'ensemble  $\omega$ -limite de toute trajectoire est l'origine. On en conclut que l'origine est encore asymptotiquement stable.*





# Bibliographie

- [1] J.P. LaSalle, Some extensions of Liapunov's second method, *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-7 (1960), 520–527.



## Chapitre 3

# Équivalences de champs de vecteurs

### 3.1 Introduction

La théorie qualitative des équations différentielles ordinaires décrit *qualitativement* les trajectoires des équations. Dire que deux équations différentielles ordinaires ont qualitativement les mêmes trajectoires, c'est dire qu'elles sont équivalentes sous une relation d'équivalence adéquate. Dans ce chapitre, nous allons voir qu'il faut plusieurs tâtonnements avant de définir les bonnes relations d'équivalence. Lorsqu'on a une relation d'équivalence, l'idéal est d'identifier un représentant « canonique » de la classe d'équivalence. Par exemple, dans le cas de la relation d'équivalence donnant la similitude des matrices, deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont la même forme de Jordan (modulo les symétries de cette forme de Jordan). De la même manière, mais seulement dans les cas les plus simples, on peut identifier un représentant canonique de la classe d'équivalence. La plupart des classes d'équivalence que nous considérerons seront locales, c'est-à-dire pour des germes d'équations différentielles ou de champs de vecteurs.

**DÉFINITION 3.1** *Un germe de champs de vecteurs en un point  $X_0$  est une classe d'équivalence de champs de vecteurs  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , où  $U$  est un voisinage ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , sous la relation d'équivalence suivante :  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est équivalent à  $w : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$  si et seulement si  $v \equiv w$  sur  $U \cap U'$ .*

**REMARQUE 3.2** *On définit de la même manière les germes de fonctions. Parler de germe en un point, plutôt que de fonction, libère de la contrainte de définir le domaine de définition, dont on sait seulement que c'est un voisinage du point.*

## 3.2 Le cas des systèmes linéaires

### 3.2.1 Equivalence linéaire

On considère un système linéaire

$$\dot{X} = AX,$$

où  $X \in \mathbb{R}^n$  et  $A$  est une matrice  $n \times n$  à entrées réelles. Un tel système est global.

Étant donné deux systèmes linéaires  $\dot{X} = AX$  et  $\dot{Y} = BY$  sur  $\mathbb{R}^n$ , il est naturel de se demander si le deuxième système peut se déduire du premier par un changement linéaire de coordonnées (qui préservera donc la forme du système). Essayons de poser  $Y = SX$ , où  $S$  est une matrice  $n \times n$  inversible. Alors

$$\dot{Y} = S\dot{X} = SAX = (SAS^{-1})Y.$$

Donc,  $B = SAS^{-1}$ , c'est-à-dire que  $B$  est semblable à  $A$ . Par suite,  $A$  et  $B$  ont les mêmes valeurs propres et la même forme de Jordan.

Cette relation d'équivalence est très forte. Trop forte en fait : elle a beaucoup trop de classes d'équivalence. En effet, regardons deux champs de vecteurs linéaires de  $\mathbb{R}^2$  ayant par exemple tous deux un point de selle, ou encore tous deux un foyer attractif avec une vitesse angulaire positive. Lorsqu'on regarde les trajectoires, on a envie de dire que les deux champs sont équivalents, même si les valeurs propres ne sont pas les mêmes. Il nous faut donc une relation d'équivalence plus faible.

### 3.2.2 Équivalence différentiable

À partir de maintenant, on va se contenter de relations d'équivalence locales : on voudra dire que deux champs de vecteurs ont, chacun restreint à un ouvert donné, la même organisation des trajectoires.

Puisqu'on travaille en classe de différentiabilité  $C^r$  où  $r \geq 1$ , on va considérer des transformations qui préservent la classe de différentiabilité. Ce seront, par exemple, des difféomorphismes de classe  $C^{r+1}$ . En effet, si  $v(X)$  est un champ de vecteurs correspondant à une équation différentielle ordinaire  $\dot{X} = v(X)$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  et si  $F : U' \subset U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un difféomorphisme de classe  $C^{r+1}$ , alors la transformée de l'équation différentielle par  $F$  est donnée par

$$\dot{Y} = DF(F^{-1}(Y))v(F^{-1}(Y)),$$

qui est bien de classe  $C^r$ . Ceci se vérifie en utilisant la règle de chaîne.

Le théorème de redressement (théorème 1.8 du chapitre 1) montre que, si  $v(X)$  et  $w(Y)$  sont deux champs de vecteurs de classe  $C^r$  et  $v(X_0) \neq 0$ ,  $w(Y_0) \neq 0$ , alors il existe des voisinages  $U_1$  de  $X_0$  et  $U_2$  de  $Y_0$  tels que  $v|_{U_1}$  et  $w|_{U_2}$  sont

$C^{r-1}$ -équivalents, puisque  $C^{r-1}$ -équivalents au champ constant  $(1, 0, \dots, 0)$ . Donc, le cas intéressant est le voisinage des points singuliers.

Soit  $X_0$  un point singulier d'un champ de vecteurs  $v(X)$ , c'est-à-dire  $v(X_0) = 0$ . Alors, au voisinage de  $X_0$ , la formule de Taylor tronquée donne

$$v(X) = A(X - X_0) + f(X),$$

où  $A = Dv(X_0)$  et  $f(X) = o(|X - X_0|)$ . Appliquons un difféomorphisme  $Y = F(X)$  de classe  $C^2$  au voisinage de  $X_0$ . Il est de la forme

$$Y = Y_0 + S(X - X_0) + G(X),$$

où  $G(X) = O(|X - X_0|^2)$ . Alors,

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= (S + DG(X))\dot{X} \\ &= SA(X - X_0) + Sf(X) + DG(X)(A(X - X_0) + f(X)). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Par le théorème des fonctions implicites on a que

$$X = X_0 + S^{-1}(Y - Y_0) + O(|Y - Y_0|^2)$$

puisque l'on sait que  $D(F^{-1})(Y_0) = (DF(X_0))^{-1}$ . Donc,

$$\dot{Y} = w(Y) = SAS^{-1}(Y - Y_0) + o(|Y - Y_0|).$$

Comme on pouvait s'y attendre, on voit qu'un difféomorphisme transformant un champ de vecteurs en un autre champ de vecteurs envoie un point singulier sur un point singulier. On voit aussi que la matrice jacobienne de  $w$  en  $Y_0$  est semblable à la matrice jacobienne de  $v$  en  $X_0$ . Encore une fois on a une relation d'équivalence trop forte !

### 3.2.3 Équivalence topologique

Pour donner une relation d'équivalence plus faible on va abandonner la contrainte que  $F$  soit différentiable et seulement demander que  $F$  soit un homéomorphisme. Mais alors, comment fait-on pour transformer un champ de vecteurs différentiable par une application seulement continue ? En fait, on ne peut pas faire cela. Pourtant, cela a du sens de demander que  $F$ , qui est un homéomorphisme, transforme les trajectoires de  $v$  en trajectoires de  $w$ . Heureusement on a un autre outil qui nous permet d'exprimer ce concept sans dériver  $F$  : il s'agit du flot !

**DÉFINITION 3.3** *Deux équations différentielles ordinaires  $\dot{X} = v(X)$  et  $\dot{Y} = w(Y)$  sont topologiquement équivalentes sur des ouverts  $U$  et  $U'$  s'il existe un homéomorphisme  $F : U \rightarrow U'$  qui conjugue les flots de  $v$  et  $w$  :*

$$F \circ \Phi_v^t = \Phi_w^t \circ F,$$

dès que ces compositions sont définies :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F} & U' \\ \Phi_v^t \downarrow & & \Phi_w^t \downarrow \\ U & \xrightarrow{F} & U' \end{array}$$

Cette relation d'équivalence convient : on peut montrer que deux champs de vecteurs linéaires de  $\mathbb{R}^2$  ayant, par exemple, tous deux un point de selle, ou encore tous deux un foyer attractif avec une vitesse angulaire positive sont topologiquement équivalents. Mais elle nous réserve des surprises ! Les classes d'équivalence sont beaucoup plus grandes que ce qu'on prévoyait au début. Ainsi, tous les systèmes linéaires sur  $\mathbb{R}^n$  ayant un foyer attractif à vitesse angulaire positive, un noeud ou un foyer attractif à vitesse angulaire négative sont topologiquement équivalents. Dans le cas où toutes les valeurs propres ont des parties réelles non nulles, on a exactement  $n + 1$  classes d'équivalence correspondant au nombre de valeurs propres à partie réelle négative.

**DÉFINITION 3.4** 1. Une matrice carrée  $A$  est hyperbolique si toutes ses valeurs propres ont des parties réelles non nulles.

2. Un point singulier d'un champ de vecteurs est hyperbolique si toutes les valeurs propres du linéarisé du champ en ce point ont des parties réelles non nulles.

**THÉORÈME 3.5** Deux équations différentielles linéaires  $\dot{X} = AX$  et  $\dot{Y} = BY$  sur  $\mathbb{R}^n$  à matrice hyperbolique sont topologiquement équivalentes si et seulement si les matrices  $A$  et  $B$  ont le même nombre de valeurs propres à partie réelle négative.

**PREUVE** Soit  $n_+$  (resp.  $n_-$ ) le nombre de valeurs propres à partie réelle positive (resp. négative). Il suffit de montrer que chacun des systèmes est topologiquement équivalent au système produit

$$\begin{aligned} \dot{Z}_+ &= Z_+, \\ \dot{Z}_- &= -Z_-, \end{aligned} \tag{3.2}$$

où  $Z_+ \in \mathbb{R}^{n_+}$  et  $Z_- \in \mathbb{R}^{n_-}$ . Ce système est un représentant canonique de la classe d'équivalence. Nous allons le noter  $\dot{Z} = CZ$ , où  $Z = (Z_+, Z_-)$ . Nous montrerons que le système  $\dot{X} = AX$  est topologiquement équivalent au système  $\dot{Z} = CZ$  en plusieurs étapes :

(i) On peut appliquer une transformation linéaire et ramener le système  $\dot{X} = AX$  à la forme

$$\dot{W} = BW = \begin{pmatrix} B_+ & 0 \\ 0 & B_- \end{pmatrix} W,$$

où  $B_+$  (resp.  $B_-$ ) est une matrice carrée  $n_+ \times n_+$  (resp.  $n_- \times n_-$ ) dont les valeurs propres ont des parties réelles positives (resp. négatives). La matrice  $B$  pourrait par exemple être une matrice de Jordan avec les blocs

bien ordonnés, mais ce n'est pas nécessaire que ce soit le cas. Il suffit donc de montrer que le système  $\dot{W} = BW$  est topologiquement équivalent au système  $\dot{Z} = CZ$ .

(ii) Posons  $W = (W_+, W_-)$ . Alors le système  $\dot{W} = BW$  s'écrit aussi

$$\begin{aligned}\dot{W}_+ &= B_+ W_+, \\ \dot{W}_- &= B_- W_-.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Il est facile de vérifier que si  $F_+$  (resp.  $F_-$ ) est une équivalence topologique entre  $\dot{W}_+ = B_+ W_+$  et  $\dot{Z}_+ = Z_+$  (resp.  $\dot{W}_- = B_- W_-$  et  $\dot{Z}_- = Z_-$ ), alors  $F = (F_+, F_-)$  est une équivalence topologique entre  $\dot{W} = BW$  et  $\dot{Z} = CZ$ . (Exercice.)

(iii) Par (i) et (ii) il suffit de montrer le théorème pour une matrice  $B$  dont toutes les valeurs propres ont des parties réelles négatives. Ici, on va supposer que la matrice  $B$  est sous une forme pour laquelle la fonction  $M(W) = |W|^2 = w_1^2 + \dots + w_n^2$  est une fonction de Lyapunov (voir chapitre 1), c'est-à-dire qu'il existe  $\alpha, \beta > 0$  tels que

$$-\alpha|W|^2 \leq L_B(M) \leq -\beta|W|^2,\tag{3.4}$$

où  $L_B(M)$  est la dérivée de Lie de  $M$  le long du champ  $BW$ .

La fonction  $M(Z) = |Z|^2$  est aussi une fonction de Lyapunov pour le champ  $CZ = -Z$  et on a  $L_C(M) = -|Z|^2$ , où  $L_C(M)$  est la dérivée de Lie de  $M$  le long du champ  $CZ$ .

Soit  $\mathbb{S}^1$  la sphère unité. On définit  $F$  ainsi :

$$\begin{cases} F|_{\mathbb{S}^1} = \text{id}, \\ F(0) = 0, \\ F(W_1) = \Phi_C^t \circ F \circ \Phi_B^{-t}(W_1), \quad \text{si } \Phi_B^{-t}(W_1) \in \mathbb{S}^1, \end{cases}$$

où  $\Phi_B^t$  (resp.  $\Phi_C^t$ ) est le flot du champ  $\dot{W} = BW$  (resp.  $\dot{Z} = CZ = -Z$ ).  $F$  est globalement définie et bijective sur  $\mathbb{R}^n$ . En effet, soit  $W_1 \neq 0$ . Par (3.4), il existe  $t$  et  $W_0 \in \mathbb{S}^1$  uniques tels que  $W_1 = \Phi_B^t(W_0)$ . On pose  $F(W_1) = \Phi_C^t(W_0)$ . Par construction, on a  $F \circ \Phi_B^t = \Phi_C^t \circ F$  (exercice : écrire les détails).  $F$  est bien sûr inversible. Pour le montrer, le plus simple est de construire son inverse (exercice : écrire les détails). On a même que  $F$  est un difféomorphisme, puisque le flot est différentiable, sauf à l'origine. Il faut montrer que  $F$  est continue à l'origine. Soit  $\epsilon > 0$ . Puisque  $L_C(M) = -|Z|^2$ , il existe  $T > 0$  tel que si  $Z_0 = W_0 \in \mathbb{S}^1$ , alors  $|\Phi_C^T(Z_0)| < \epsilon$ . Soit  $\delta = \min_{W_0 \in \mathbb{S}^1} |\Phi_B^T(W_0)|$ . Alors, si  $|W_1| < \delta$ , il existe  $T_1 > T$  et  $W_0 \in \mathbb{S}^1$  tels que  $W_1 = \Phi_B^{T_1}(W_0)$ . Donc,  $F(W_1) = \Phi_C^{T_1}(W_0)$  et, par suite,  $|F(W_1)| < \epsilon$ , ce qui montre bien la continuité de  $F$  en 0. La continuité de  $F^{-1}$  en 0 se montre de la même manière.

(iv) En fait, il faut aussi montrer le théorème pour une matrice  $B$  dont toutes les valeurs propres ont des parties réelles positives. Exercice : expliquer comment déduire ceci de (iii).  $\square$

### 3.3 Équivalence topologique orbitale

Par la suite, nous aurons besoin d'une relation d'équivalence encore plus faible ! En effet, si deux systèmes sont topologiquement équivalents, l'homéomorphisme qui conjugue leurs flots envoie les orbites périodiques du premier sur les orbites périodiques du second. Mais, ceci n'est possible que lorsque les orbites périodiques ont même période ! Donc, par exemple, deux systèmes qui ont même organisation topologique des trajectoires et chacun un unique cycle limite globalement attractif ne sont pas topologiquement équivalents si leurs cycles limites n'ont pas la même période. Ils seront par contre topologiquement orbitalement équivalents au sens de la définition suivante.

**DÉFINITION 3.6** Deux équations différentielles ordinaires  $\dot{X} = v(X)$  et  $\dot{Y} = w(Y)$  sont topologiquement orbitalement équivalentes sur des ouverts  $U$  et  $U'$  s'il existe un homéomorphisme  $F : U \rightarrow U'$  qui envoie les trajectoires de  $v$  sur les trajectoires de  $w$  en préservant l'orientation des trajectoires mais pas nécessairement la paramétrisation.

### 3.4 Systèmes dynamiques discrets et continus

**DÉFINITION 3.7** Un système dynamique est une paire  $\{U, \{\Phi^t\}_{t \in \mathcal{T}}\}$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  (ou plus généralement une variété différentiable), appelé espace des états, et  $\{\Phi^t\}_{t \in \mathcal{T}}$  est une famille d'opérateurs d'évolution,  $\Phi^t$ , de classe  $C^1$  satisfaisant

$$\Phi^0 = \text{id}, \quad (3.5)$$

$$\Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s, \quad (3.6)$$

la dernière propriété étant valide lorsque la composition est définie.

Le système dynamique peut être discret ou continu.

**DÉFINITION 3.8** Une position d'équilibre d'un système dynamique  $\{U, \{\Phi^t\}_{t \in \mathcal{T}}\}$  est un point  $X_0 \in U$  tel que  $\Phi^t(X_0) = X_0$  pour tout  $t \in \mathcal{T}$ .

**EXEMPLE 3.9** La paire  $\{U, \{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}\}$ , où  $\{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$  est l'application du flot d'une EDO de classe  $C^1$ .

**EXEMPLE 3.10** La paire  $\{U, \{F^n\}_{n \in \mathbb{Z}}\}$ , où  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$ .

**EXEMPLE 3.11** La paire  $\{U, \{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}\}$ , où  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$ .

**EXEMPLE 3.12** Un exemple de système dynamique discret est donné par le flot d'une équation différentielle ordinaire  $\dot{X} = v(X)$  en un temps  $T$  fixé,  $\Phi^T$ . Regarder les itérées de  $F = \Phi^T$ , c'est-à-dire les composées

$$F^n = \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_n$$



revient à regarder l'évolution du système aux différents temps discrets  $t_n = nT$ . On regardera aussi le cas  $n$  négatif, qui correspond à la  $|n|$ -ième itérée de  $F^{-1}$ . L'application  $F$  est un difféomorphisme.

EXEMPLE 3.13 Un autre exemple de système dynamique discret est donné par l'application de premier retour de Poincaré,  $P$ , définie au voisinage d'une solution périodique d'une EDO de classe  $C^r$ . Cette application est définie sur une section  $\Sigma$  de classe  $C^r$  transversale à la solution périodique. La solution périodique coupe la section  $\Sigma$  en un point  $X_0$  qui est un point fixe de  $P$ . Voyons que cette application  $P$  est un difféomorphisme de classe  $C^r$ . On peut supposer que la section  $\Sigma$  est donnée par  $F(X) = 0$ , où  $F$  est de classe  $C^r$  au voisinage de  $X_0$ . Comme elle est transversale à la solution périodique en  $X_0$ , on a  $\nabla F(X_0) \cdot v(X_0) \neq 0$ . Comme dans le théorème de redressement, on fait un changement de variables  $X \mapsto (t, Y)$ , où  $Y \in V \subset \mathbb{R}^{n-1}$  paramétrise un voisinage de  $X_0$  dans  $\Sigma$  : le point de  $\Sigma$  paramétré par  $Y$  est alors donné par  $g(Y)$ , où  $g$  est de classe  $C^r$  et de rang  $n-1$ , et  $g(Y_0) = X_0$ . Alors, pour  $Y \in \Sigma$ ,  $P(Y) = \Phi^t(Y)$  où  $t$  est tel que  $F(\Phi^t(g(Y))) = 0$ . On a  $F(\Phi^{t_0}(g(Y_0))) = 0$ . Aussi  $\frac{\partial}{\partial t}(F(\Phi^t(g(Y))))|_{(t_0, Y_0)} = \nabla F(\Phi^{t_0}(X_0)) \cdot v(\Phi^{t_0}(X_0)) \neq 0$ . On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites et on trouve que  $F(\Phi^t(X)) = 0$  dans un voisinage de  $X_0$  si et seulement si  $t = T(Y)$  pour une fonction de classe  $C^r$  définie sur un voisinage  $W$  de  $Y_0$ . Alors  $P(Y) = \Phi^{T(Y)}(Y)$  est de classe  $C^r$  car composition de fonctions de classe  $C^r$ . Elle est inversible de par le théorème d'existence et d'unicité des solutions des EDO.

EXEMPLE 3.14 Dans le cas d'une équation différentielle non autonome  $\dot{X} = v(X, t)$ , où  $v(X, t + T) = v(X, t)$ , on regardera souvent les solutions aux instants  $t_0 + nT$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Ceci se fait en itérant l'application du flot  $\Phi_{t_0}^T = F$ , qui à la condition initiale  $(X_1, t_0)$  fait correspondre la solution au temps  $t_0 + T$ .

PROPOSITION 3.15 Soit  $\dot{X} = v(X)$  une équation différentielle ordinaire de classe  $C^1$  sur  $U$  et soit  $F = \Phi^T$  le flot au temps  $T$ . Si  $X_0$  est un point singulier de  $v$ , alors  $X_0$  est un point fixe de  $F$ . Si  $A = Dv(X_0)$ , alors la partie linéaire de  $F$  en  $X_0$  est  $e^{AT}$ . En particulier, si le point singulier  $X_0$  est hyperbolique, alors la matrice  $DF(X_0)$  n'a que des valeurs propres de module différent de 1.

PREUVE Pour calculer la matrice jacobienne de  $F$  en  $X_0$  il faut se rappeler la construction de  $F$  et de sa dérivée (voir chapitre 1). On a

$$\Phi^T(X) = \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_m(X, T)$$

et

$$D\Phi^T(X) = \lim_{m \rightarrow \infty} \Psi_m(X, T)$$

où

$$\begin{cases} \Phi_0(X, t) = X, \\ \Psi_0(X, t) = I_n, \\ \Phi_{m+1}(X, t) = X + \int_0^t v(\Phi_m(X, s)) ds, \\ \Psi_{m+1}(X, t) = I_n + \int_0^t Dv(\Phi_m(X, s))\Psi_m(X, s) ds. \end{cases}$$

Calculons ces fonctions lorsque  $X = X_0$ . Alors, pour tout  $m$  et  $s > 0$  on a  $\Phi_m(X_0, s) = X_0$  et

$$\begin{aligned}\Psi_0(X_0, T) &= I_n, \\ \Psi_1(X_0, T) &= I_n + AT, \\ \Psi_2(X_0, T) &= I_n + AT + \frac{A^2}{2!}T^2, \\ &\vdots \\ \Psi_m(X_0, T) &= I_n + \sum_{i=1}^m \frac{A^i}{i!}T^i, \\ &\vdots\end{aligned}$$

d'où le résultat.  $\square$

**DÉFINITION 3.16** Soit  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^1$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et  $X_0$  un point fixe de  $F$ . Le point fixe  $X_0$  est hyperbolique si  $DF(X_0)$  a toutes ses valeurs propres en dehors du cercle unité.

**THÉORÈME 3.17** Soit  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^1$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et  $X_0$  un point fixe hyperbolique de  $F$ , dont toutes les valeurs propres ont module inférieur à 1. Alors,  $X_0$  est asymptotiquement stable, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage  $V$  de  $X_0$  tel que, pour tout  $X_1 \in V$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} F^m(X_1) = X_0$ .

**PREUVE** Au voisinage de  $X_0$  le difféomorphisme a la forme

$$F(X) = X_0 + A(X - X_0) + o(|X - X_0|).$$

On peut bien sûr faire un changement linéaire de coordonnées (centré en  $X_0$ ) et supposer que la matrice est obtenue de la matrice de Jordan en ramenant tous les coefficients hors diagonale à  $\epsilon$ , et en se ramenant au cas réel dans le cas de blocs de Jordan complexes conjugués, c'est-à-dire que la matrice est bloc diagonale avec des blocs de la forme  $(\lambda)$ ,  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{pmatrix} \lambda & \epsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \epsilon & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Alors, si  $\epsilon$  est assez petit, on aura que

$$\|A\| = \max_{x \in S^{n-1}} |AX| < 1.$$

Par continuité de  $DF$ , il existe un voisinage  $V = B(X_0, r)$  de  $X_0$  sur lequel  $\|DF(X)\| \leq c < 1$ . Alors, si  $X \in V$ ,

$$|F(X) - X_0| \leq \max_{X \in V} \|DF(X)\| |X - X_0| \leq c |X - X_0|.$$

En itérant, on obtient

$$|F^n(X) - X_0| \leq \max_{X \in V} \|DV(X)\| |X - X_0| \leq c^n |X - X_0|,$$

d'où le résultat.  $\square$

Il existe un lien entre les exemples 3.13 et 3.14. En effet, supposons qu'ont ait une EDO autonome  $\dot{X} = v(X)$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et que cette EDO ait une solution périodique  $X(t) = Z(t)$  où  $Z(t+T) = Z(t)$ . On fait le changement de variables  $Y = X - Z(t)$ . Comme il dépend du temps, il transforme l'EDO autonome en une EDO non autonome, mais dépendant périodiquement du temps. On obtient

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= v(Y + Z(t)) - \dot{Z}(t) \\ &= v(Y + Z(t)) - v(Z(t)) \\ &= Dv(Z(t))Y(t) + O(|Y|^2). \end{aligned}$$

L'approximation linéaire est donc donnée par le système linéaire non autonome

$$\dot{Y} = Dv(Z(t))Y = A(t)Y, \quad (3.7)$$

qui est appelé *équation variationnelle* au voisinage de la solution périodique. On remplace  $Y \in \mathbb{R}^n$  par une matrice  $M \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$  et on considère le système

$$\dot{M} = A(t)M$$

sous la condition initiale  $M(0) = I$ . Si  $T$  est la période du cycle, la matrice  $M(T)$  est appelée la *matrice de monodromie du cycle*.

**THÉORÈME 3.18** *Les valeurs propres de  $M(T)$  sont  $1, \mu_2, \dots, \mu_n$ , où  $\mu_2, \dots, \mu_n$  sont les valeurs propres de l'application de premier retour de Poincaré,  $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , définie sur une section  $\Sigma$  transversale au cycle.*

**PREUVE** Soit  $X_0$  le point d'intersection de la solution périodique avec  $\Sigma$ . Alors,  $\Phi^T(X_0) = X_0$ . Si l'on considère  $Z_s(t) = Z(t+s)$ , alors  $Z_s$  est une famille de solutions de l'EDO de condition initiale  $Z(s)$  pour tout  $s$ . Donc, la fonction dérivée par rapport à la condition initiale,  $Z'$ , est solution de l'équation variationnelle. On considère le vecteur  $q = Z'(0)$  : on a  $M(T)q = q$ . Donc,  $q$  est un vecteur propre de  $M(T)$  associé à la valeur propre 1. On prend pour  $\Sigma'$  un sous-espace vectoriel passant par  $X_0$  et perpendiculaire au sous-espace engendré par  $q$ . Ce sous-espace est transverse au flot sur un voisinage de  $X_0$ . On regarde l'application de premier retour de Poincaré définie sur un voisinage de  $X_0$  dans  $\Sigma'$  comme dans l'exemple 3.13. Si  $Y$  est une paramétrisation de  $\Sigma'$  et  $T(Y)$  est le temps de premier retour, alors l'application de premier retour est définie comme  $P(Y) = \Phi^{T(Y)}(Y)$ . On s'intéresse à  $DP(Y)$ .

En deuxième étape on remarque que Les valeurs propres et la forme de Jordan de la matrice jacobienne de l'application de premier retour de Poincaré

$P$  sont indépendantes de la section  $\Sigma$  choisie. En effet, soit  $\Sigma'$  une autre section transversale au champ et considérons la transition régulière  $R : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ . Soit  $Q$ , l'application de premier retour de Poincaré définie sur  $\Sigma'$ . Alors,  $Q = R \circ P \circ R^{-1}$ . Soit  $X_0$  et  $X'_0$  les points d'intersection de la solution périodique avec  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  respectivement. On a  $R(X_0) = X'_0$  et

$$DQ(X'_0) = DR(X_0) DP(X_0) DR^{-1}(X'_0).$$

Puisque  $DR^{-1}(X'_0) = (DR(X_0))^{-1}$ , les deux matrices  $DP(X_0)$  et  $DQ(X'_0)$  sont semblables.  $\square$

REMARQUE 3.19 On parle aussi d'application de Poincaré dans le cas d'une EDO non autonome dépendant de manière périodique du temps

$$\dot{X} = v(X, t), \quad v(t + T) = v(t).$$

L'application de Poincaré est donnée par  $P = \Phi_{t_0}^T : P(X)$  est le point au temps  $t_0 + T$  de la solution de condition initiale  $X$  au temps  $t_0$ . Soit  $X_0$  un point fixe de cette application. Alors, le théorème 3.18 se généralise à ce cas : on peut montrer, de même que ci-dessus, que 1 est une valeur propre de la matrice jacobienne de  $P$ . Ici encore, on peut remarquer que les valeurs propres et la forme de Jordan de la matrice jacobienne de l'application de Poincaré sont indépendantes de  $t_0$ .

### 3.5 Théorème de Hartman-Grobman

Ce théorème affirme que si un champ de vecteurs a un point singulier hyperbolique, alors ce champ de vecteurs est topologiquement équivalent à sa partie linéaire au voisinage du champ. Il existe deux versions de ce théorème, l'une pour les systèmes discrets (équations aux différences), l'autre pour les équations différentielles ordinaires. La plupart des preuves du théorème pour les équations différentielles ordinaires utilisent le théorème dans le cas discret.

L'importance du théorème de Hartman-Grobman vient du fait qu'il termine la classification topologique locale au voisinage des points singuliers hyperboliques. Commençons par un exemple montrant que l'hypothèse que le point singulier est hyperbolique est essentielle.

EXEMPLE 3.20 Considérons le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x - y(x^2 + y^2). \end{aligned} \tag{3.8}$$

En coordonnées polaires, il devient

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -r^3, \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \tag{3.9}$$

et on voit que l'origine est un foyer faible. On peut intégrer explicitement le système et voir que l'origine est asymptotiquement stable. Par contre, si l'on se limite au système linéarisé

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x,\end{aligned}\tag{3.10}$$

qui en coordonnées polaires a la forme

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 0, \\ \dot{\theta} &= 1,\end{aligned}\tag{3.11}$$

on voit que toutes les trajectoires sont périodiques : ce sont des cercles centrés à l'origine. Dans ce cas, on dit que l'origine est un centre. Donc, le système total n'est pas topologiquement équivalent au système linéarisé.

**DÉFINITION 3.21** Soit  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $G : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux difféomorphismes.  $F$  et  $G$  sont topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme  $H : U \rightarrow U'$  tels que  $F \circ H = H \circ G$ .

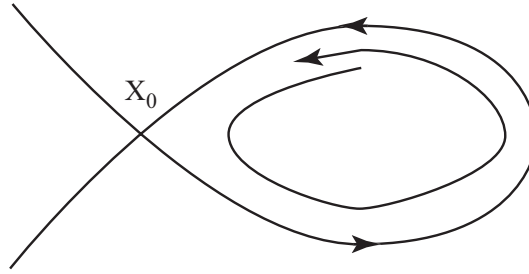
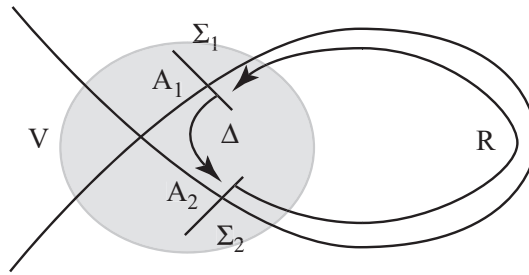
**THÉORÈME 3.22** (Théorème de Hartman-Grobman pour les difféomorphismes) Soit  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  et  $X_0 \in U$  un point fixe hyperbolique de  $F$ . Alors, il existe un voisinage  $V$  de  $X_0$  sur lequel  $F$  est topologiquement équivalent à sa partie linéaire  $G(X) = X_0 + A(X - X_0)$  pour  $A = DF(X_0)$ .

**THÉORÈME 3.23** (Théorème de Hartman-Grobman pour les champs de vecteurs) Soit  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  et  $X_0 \in U$  un point singulier hyperbolique de  $v$ . Alors, il existe un voisinage  $V$  de  $X_0$  sur lequel  $v$  est topologiquement équivalent au champ linéaire  $A(X - X_0)$  pour  $A = Dv(X_0)$ .

L'importance du théorème de Hartman-Grobman vient du fait qu'il termine la classification topologique locale au voisinage des points singuliers hyperboliques. Mais le fait qu'on se limite à une équivalence topologique a aussi ses limites. On va vouloir utiliser des théorèmes plus fins, et remplacer les homéomorphismes par des difféomorphismes de classe  $C^r$ , principalement lorsqu'on va regarder des questions globales ou encore analyser les bifurcations. Les hypothèses seront plus restrictives mais les conséquences beaucoup plus importantes. Comme la preuve de ces théorèmes n'utilisent pas le théorème de Hartman-Grobman, et que la preuve de ce théorème est longue et technique, nous allons la sauter. Montrons la puissance d'un théorème plus fin.

### 3.5.1 Étude d'une boucle homoclinique dans le plan

**THÉORÈME 3.24** On considère un champ de vecteurs  $\dot{X} = v(X)$  dans un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^2$  avec un point de selle hyperbolique  $X_0$  de valeurs propres  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 < 0$ .

FIGURE 3.1 – Une boucle homoclinique attractive par un point de selle  $X_0$ FIGURE 3.2 – Les sections  $\Sigma_i$  et les applications  $\Delta$  et  $R$ 

On suppose de plus que le champ a une boucle homoclinique passant par  $X_0$ , c'est-à-dire qu'il existe une trajectoire dont les ensembles  $\alpha$ -limite et  $\omega$ -limite sont  $X_0$  (voir figure 3.1). On définit le rapport d'hyperbolicité  $r$  de  $X_0$  comme

$$r = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|.$$

On suppose qu'il existe un difféomorphisme  $Y = F(X)$  de classe  $C^1$ , défini sur un voisinage  $V$  de  $X_0$ , tel que  $F(X_0) = 0$  et transformant l'EDO  $\dot{X} = v(X)$  en le champ linéaire  $\dot{Y} = AY$ , où  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ .

Alors, si  $r > 1$  la boucle homoclinique est attractive, et si  $r < 1$ , elle est répulsive. (Dire que la boucle homoclinique est attractive est dire que la réunion de la boucle et du point de selle est l'ensemble  $\omega$ -limite d'un anneau à l'intérieur de la boucle dont la boucle homoclinique est la frontière.)

PREUVE Pour la preuve on considère des sections  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  parallèles aux axes dans les coordonnées  $Y = (y_1, y_2)$ . On considère une application de premier retour de Poincaré  $P : \Sigma'_1 \subset \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$ . Cette application est la composition de deux applications de transition (voir figure 3.2) :

- une application  $\Delta : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ , appelée application de Dulac ;
- une application régulière  $R : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$ .

On va « calculer »  $P$ . Remarquons que  $\Sigma_1$  est paramétré par  $y_1$  et que la boucle homoclinique correspond à  $y_1 = 0$ . On aura  $P(0) = 0$ . On peut prendre les coordonnées  $y_1, y_2$ , pour que  $y_1, y_2 > 0$  à l'intérieur de la boucle. Pour montrer que la boucle est attractive (resp. répulsive), il suffit de montrer que  $P(y_1) < y_1$  (resp.  $P(y_1) > y_1$ ) pour  $y_1 > 0$  assez petit.

**Calcul de  $\Delta$ .** Dans les coordonnées  $y_1, y_2$ , le champ sur  $V$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2.\end{aligned}$$

On a  $\Sigma_1 = \{y_2 = a\}$  et  $\Sigma_2 = \{y_1 = b\}$ . L'EDO donne  $\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\lambda_2 y_2}{\lambda_1 y_1}$  qu'on peut intégrer explicitement et on obtient

$$\int_a^{\Delta(y_1)} \frac{dy_2}{\lambda_2 y_2} = \int_{y_1}^b \frac{dy_1}{\lambda_1 y_1}.$$

On intègre et on prend l'exponentielle. On obtient, après réduction,

$$\Delta(y_1) = \left( a b \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) y_1^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = C_1 y_1^r,$$

où  $C_1, r > 0$ .

**Calcul de  $R$ .** Dans les coordonnées originales  $X$  on va montrer que  $R$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$ . En composant avec les changements de coordonnées vers les coordonnées  $y_2$  et  $y_1$  sur  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , on aura que  $R$  est encore un difféomorphisme de classe  $C^1$ .

Soit  $A_i$ , le point de rencontre de  $\Sigma_i$  avec la séparatrice de  $X_0$ . On sait que les trajectoires  $\Phi^t(X_1)$  dépendent de manière  $C^1$  de la condition initiale  $X_2$  sur un voisinage de  $A_2$ . Par continuité des trajectoires en fonction de la condition initiale, pour chaque  $X_2 \in \Sigma_2$ , il existe  $T(X_2) > 0$  minimum tel que  $\Phi^{T(X_2)} \in \Sigma_1$ . On veut montrer que  $T(X_2)$  dépend de manière  $C^1$  de  $X_2$ . Alors l'application  $R$  sera donnée par  $R(X_2) = \Phi^{T(X_2)}$  sera de classe  $C^1$ . La fonction  $T(X_2)$  peut être obtenue par le théorème des fonctions implicites, ce qui va assurer qu'elle est au moins de classe  $C^1$ . En effet, dans les coordonnées  $X$ , la section  $\Sigma_1$  est, au voisinage de  $A_1$ , la courbe de niveau  $F(X) = 0$  d'une fonction  $F$  de classe  $C^1$ . On cherche  $T(X_2)$  solution de

$$F(\Phi^{T(X_2)}(X_2)) = 0.$$

Pour cela, on considère

$$G(X_2, t) = F(\Phi^t(X_2)),$$

et on sait que que  $G(A_2, T_0) = 0$ . De plus,

$$\left. \frac{\partial G}{\partial t} \right|_{(A_2, T_0)} = \nabla F(A_1) \cdot v(A_1) \neq 0,$$

puisque le champ est transverse à  $\Sigma_1$  en  $A_1$ . Le théorème des fonctions implicites assure donc l'existence d'une unique solution  $t = T(X_2)$  de  $G(X_2, t) = 0$  au voisinage de  $(A_2, T_0)$ . On a donc montré que  $R$  est de classe  $C^1$ .

**Détermination du type de la boucle.** Comme  $R$  est de classe  $C^1$ , et que géométriquement on voit que dans la coordonnée  $y_2$  avec image dans la coordonnée  $y_1$  elle est croissante, elle peut s'écrire

$$R(y_2) = C_2 y_2 + o(y_2),$$

où  $C_2 > 0$ . On a donc

$$P(y_1) = C_2(C_1 y_1^r) + o(C_1 y_1^r) = C_3 y_1^r + o(y_1^r),$$

où  $C_3 > 0$ . On considère l'application *déplacement* définie par  $D(y_1) = P(y_1) - y_1$ . On a  $D(0) = 0$ , puisque  $y_1 = 0$  correspond à la boucle homoclinique. Regardons sa dérivée :

$$D'(y_1) = C_3 r y_1^{r-1} + o(y_1^{r-1}) - 1 = C_3 r y_1^{r-1} (1 + O(y_1)) - 1.$$

Soit  $\epsilon > 0$ . Il existe  $\delta_1$  tel que, pour  $y_1 \in ]0, \delta_1[$ , alors  $1 + O(y_1) \in ]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$ . De plus, si  $r > 1$  (resp.  $r < 1$ ), il existe  $\delta_2 > 0$  tel que  $y_1^{r-1} < \epsilon$  (resp.  $y_1^{r-1} > \frac{1}{\epsilon}$ ) pour  $y_1 \in ]0, \delta_2[$ . On prend  $\epsilon$  assez petit pour que  $C_3 r \epsilon (1 + \epsilon) < 1$  (resp.  $C_3 r \frac{1-\epsilon}{\epsilon} > 1$ ). Alors, si  $y_1 \in ]0, \min(\delta_1, \delta_2)[$  on a  $D'(y_1) < 0$ , (resp.  $D'(y_1) > 0$ ). Par le théorème des accroissements finis (qui ne requiert pas la différentiabilité en 0!),

$$D(y_1) - D(0) = D'(y_1^*) y_1 \begin{cases} < 0, & r > 1, \\ > 0, & r < 1, \end{cases}$$

pour  $y_1 \in ]0, \min(\delta_1, \delta_2)[$ . Donc,  $P(y_1) < y_1$  (resp.  $P(y_1) > y_1$ ) sur  $]0, \min(\delta_1, \delta_2)[$ .  
□



## Chapitre 4

# La théorie des formes normales de Poincaré

### 4.1 Introduction

Cette méthode est intéressante pour des systèmes suffisamment différentiables (classe  $C^m$  avec  $m > 1$ ). Le  $m$  sera toujours plus grand que l'ordre des séries de Taylor tronquées que l'on considérera. La problématique est la suivante : étant donné un champ de vecteurs ayant un point singulier en  $X_0$ , peut-on effectuer un changement de coordonnées ramenant le système au voisinage du point singulier au système linéarisé ? Si oui, on comprend la forme des trajectoires. Bien sûr, ce ne sera pas toujours possible comme le montre le système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x - y(x^2 + y^2),\end{aligned}$$

puisque l'origine de ce système est un foyer asymptotiquement stable, alors que l'origine du système linéarisé est un centre. Comme le système est de classe  $C^m$ , on peut utiliser son développement de Taylor limité. Dans le cas où la linéarisation du système n'est pas possible, on veut simplifier au maximum les termes non linéaires du développement de Taylor de manière à pouvoir comprendre l'organisation des trajectoires dans le système simplifié. La méthode s'applique à des systèmes à paramètres. On verra qu'elle a des applications très importantes comme la bifurcation de Hopf.

### 4.2 La forme normale de Poincaré

On considère un champ de vecteurs de classe  $C^m$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  et ayant un point singulier en  $X_0$ . En effectuant une translation, on peut supposer  $X_0 = 0$ . Dans un premier temps, on essaie de se débarrasser de tous les termes non linéaires. La méthode est itérative : on se débarrasse des termes de degré 2, puis de degré 3, etc. On va considérer l'étape générale de se débarrasser des

termes de degré  $r$  ( $r \geq 2$ ). On suppose donc qu'au voisinage de  $X_0$  le champ a la forme

$$\dot{X} = AX + f_r(X) + O(X^{r+1}), \quad (4.1)$$

où  $f_r(X)$  est la partie homogène (vectorielle) de degré  $r$  ( $r < m$ ). On essaie de se débarrasser des termes de degré  $r$ . Pour cela, on utilise un changement de variables avec des termes de degré  $r$ . En général, on donne les nouvelles variables en fonction des anciennes. Ici, on va faire le contraire ! En effet, cela simplifie les calculs. On cherche donc s'il existe  $Y = g(X)$  tel que

$$X = g^{-1}(Y) = Y + h_r(Y) \quad (4.2)$$

est un changement de variables vectoriel qui transforme le système en

$$\dot{Y} = AY + O(Y^{r+1}). \quad (4.3)$$

Dans cette expression  $h_r(Y)$  est un polynôme homogène (vectoriel) inconnu de degré  $r$ .

Pour trouver  $h_r$ , on calcule  $\dot{X}$  de deux manières comme fonction de  $Y$  et on compare les termes de degré  $r$  des deux écritures. La première écriture est obtenue en substituant (4.2) dans (4.1). Alors,

$$\dot{X} = A(Y + h_r(Y)) + f_r(Y + h_r(Y)) + O((Y + h_r(Y))^{r+1}).$$

On se convainc aisément que  $f_r(Y + h_r(Y)) = f_r(Y) + O(Y^{r+1})$  et que  $O((Y + h_r(Y))^{r+1}) = O(Y^{r+1})$ . Donc,

$$\dot{X} = AY + (Ah_r(Y) + f_r(Y)) + O(Y^{r+1}). \quad (4.4)$$

La deuxième écriture est obtenue en dérivant (4.2) par rapport au temps, et en substituant dedans la forme normale cherchée (4.3)

$$\dot{X} = (\text{id} + h_r')\dot{Y} = (\text{id} + h_r')(AY + O(Y^{r+1})) = AY + h_r'AY + O(Y^{r+1}). \quad (4.5)$$

Ici,  $h_r'$  est le jacobien de  $h_r$ . C'est une matrice  $n \times n$  et il est facile de se convaincre que ses entrées sont des polynômes homogènes de degré  $r - 1$ .

Les équations (4.4) et (4.5) ont les mêmes termes linéaires. En comparant les termes de degré  $r$ , on obtient :

$$Ah_r(Y) + f_r(Y) = h_r'AY$$

que l'on choisit d'écrire

$$L_A(h_r) = h_r'A - Ah_r = f_r. \quad (4.6)$$

Dans la littérature cette équation est appelée *équation homologique*. Quel est l'avantage de cette expression ? Considérons l'ensemble  $H_r$  des fonctions vectorielles homogènes de degré  $n$ . C'est un espace vectoriel de dimension finie dont les générateurs sont de la forme  $Y_1^{m_1} \dots Y_n^{m_n} e_s$ , où  $e_s$  est le  $s$ -ième vecteur

de la base canonique. L'opérateur  $L_A$  défini sur  $H_r$  est linéaire et son image est dans  $H_r$  :  $L_A : H_r \rightarrow H_r$ . On s'est donc ramené à un problème d'algèbre linéaire ! Quand l'équation  $L_A(h_r) = f_r$  a-t-elle toujours une solution, quel que soit  $f_r$  ? Quand  $L_A$  est surjectif. Mais comme  $L_A$  va de  $H_r$  à  $H_r$ ,  $L_A$  est surjectif si et seulement si injectif, c'est-à-dire si et seulement si son noyau est nul, un critère facile à vérifier. Dans le cas où le noyau de  $L_A$  est non nul, on ne peut se débarrasser de n'importe quel  $f_r$ , mais on peut se débarrasser de tout  $f_r$  qui se trouve dans l'image de  $L_A$  et donc, simplifier le système.

### 4.2.1 Le cas où $A$ est diagonalisable

$A$  est diagonalisable si et seulement si elle admet une base de vecteurs propres. Il existe alors une matrice  $S$  inversible telle que  $SAS^{-1} = D$  est diagonale. En utilisant le changement de coordonnées  $X_1 = SX$ , on peut travailler dans la variable  $X_1$ . On peut donc, sans perte de généralité, supposer que  $D$  est diagonale. MAIS, ATTENTION ! Même si  $A$  est une matrice à coefficients réels, ses valeurs propres peuvent être complexes et ses vecteurs propres dans  $\mathbb{C}^n$ . Si l'on regarde la démarche décrite ci-dessus, à aucun moment on n'a utilisé le fait que les coefficients de  $A$  sont réels et la démarche s'applique donc aussi bien pour une matrice  $A$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . On peut donc calculer une forme normale pour un champ de vecteurs dans  $\mathbb{C}^n$ , voir que ce changement préserve le « caractère réel » du système, et revenir ensuite dans  $\mathbb{R}^n$ .

Par la remarque précédente, on peut se ramener au cas d'une matrice  $A$  diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Une base de  $H_r$  est donnée par l'ensemble des vecteurs de la forme

$$h = y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n} e_s$$

où  $m_1 + \dots + m_n = r$  et  $e_s$  est le  $s$ -ième vecteur de la base canonique. Calculons  $L_A(h)$ . Pour un monôme de la forme  $y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}$  on utilise souvent la forme abrégée :  $Y^m$ , où  $m = (m_1, \dots, m_n)$ . Le vecteur  $Ah$  est simplement le vecteur  $\lambda_s Y^m e_s = \lambda_s h$ . Calculons maintenant  $h'AY$ . Remarquons que

$$\frac{\partial h}{\partial y_i} = m_i y_1^{m_1} \dots y_i^{m_i-1} \dots y_n^{m_n} = m_i \frac{Y^m}{y_i}.$$

Alors,

$$h'AY = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1 \frac{Y^m}{y_1} & m_2 \frac{Y^m}{y_2} & \dots & m_n \frac{Y^m}{y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$h'AY = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i Y^m \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i Y^m e_s = \left( \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i \right) h.$$

Donc,

$$L_A(h) = \left( \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i - \lambda_s \right) h,$$

c'est-à-dire que  $h$  est un vecteur propre de  $L_A$  de valeur propre  $\sum_{i=1}^n m_i \lambda_i - \lambda_s$ . On voit donc que l'équation homologique sur  $H_r$  a toujours une solution si et seulement si

$$\lambda_s \neq \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i$$

pour tout  $s$  et pour tous  $(m_1, \dots, m_n)$  tel que  $\sum_{i=1}^n m_i = r$ .

Que se passe-t-il si  $\lambda_s = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i$ ? Le monôme correspondant,  $Y^m = y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}$ , est dit *résonant*. Dans le cas où  $A$  est diagonale, on peut se débarrasser de tous les monômes non résonants et on reste avec un système qui n'a que des monômes résonants. Ce système a souvent une forme simple, sur laquelle on peut lire et comprendre la géométrie des trajectoires. Regardons maintenant des exemples.

**EXEMPLE 4.1** *Cas d'un système dans  $\mathbb{R}^2$  avec deux valeurs propres imaginaires pures,  $\pm i\omega$ . Pour le système réel, il est possible, modulo un changement linéaire de coordonnées de supposer que la matrice a la forme  $A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$ . Il est naturel de passer aux coordonnées complexes  $z = x + iy$  et  $\bar{z} = x - iy$ . Dans ces coordonnées, la matrice est diagonale :  $D = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}$ . Les valeurs propres sont  $\lambda_1 = i\omega$  et  $\lambda_2 = -i\omega$ . Regardons les relations de résonance pour la première équation. On doit résoudre :  $\lambda_1 = m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2$ , soit  $m_1 = m_2 + 1$ , où  $m_1, m_2 \geq 0$  et  $m_1 + m_2 \geq 2$ . Ceci nous donne les monômes résonants  $z^2 \bar{z}, z^3 \bar{z}^2, \dots, z^{k+1} \bar{z}^k, \dots$ , qui sont tous de degré*

impair. Donc, dans la première équation, on peut se ramener, modulo un changement de coordonnées  $z \mapsto Z$ , à une équation de la forme

$$\dot{Z} = i\omega Z + c_1 Z^2 \bar{Z} + c_2 Z^3 \bar{Z}^2 + \dots + c_k Z^{k+1} \bar{Z}^k + O(|Z|^{2k+2}).$$

On peut faire le même calcul pour la deuxième équation et voir que les monômes résonants sont de la forme  $z^k \bar{z}^{k+1}$ . Mais, on peut aussi être astucieux : puisque le système est réel, la deuxième équation est la conjuguée de la première :

$$\dot{\bar{Z}} = -i\omega \bar{Z} + \bar{c}_1 Z \bar{Z}^2 + \bar{c}_2 Z^2 \bar{Z}^3 + \dots + \bar{c}_k Z^k \bar{Z}^{k+1} + O(|Z|^{2k+2}).$$

Revenons aux coordonnées réelles  $(x, y) = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$ . En posant  $c_j = a_j + ib_j$ , le système devient

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y + (a_1 x - b_1 y)(x^2 + y^2) + \dots + (a_k x - b_k y)(x^2 + y^2)^k + O(|(x, y)|^{2k+2}), \\ \dot{y} &= \omega x + (b_1 x + a_1 y)(x^2 + y^2) + \dots + (b_k x + a_k y)(x^2 + y^2)^k + O(|(x, y)|^{2k+2}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

La géométrie se lit tout de suite si on passe aux coordonnées polaires

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

dans lesquelles le système devient

$$\begin{aligned} \dot{r} &= a_1 r^3 + \dots + a_k r^{2k+1} + O(r^{2k+2}), \\ \dot{\theta} &= \omega + b_1 r^2 + \dots + b_k r^{2k} + O(r^{2k+1}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

On voit tout de suite que  $\dot{\theta} > 0$  pour  $r$  assez petit. D'autre part, supposons que  $a_1, \dots, a_{k-1} = 0$  et  $a_k \neq 0$ . Alors, au voisinage de l'origine,  $\dot{r}$  a le signe de  $a_k$ . Si  $a_k$  est négatif (resp. positif), le point singulier est un foyer faible attractif (resp. répulsif).

L'effet de la mise sous forme normale est de redresser les trajectoires pour transformer le système en un système à peu près invariant sous toute rotation autour de l'origine.

Dans le cas de l'exemple 4.1, on a triché un peu, puisqu'on s'est permis de mettre sous forme normale des termes d'ordre supérieur, même s'il restait des termes non linéaires de degré plus petit. Nous laissons comme exercice le soin de vérifier que cette approche est légitime.

**Exercice** Vérifier que, lors de la mise sous forme normale des termes de degré  $r$ , on ne détruit pas le travail accompli sur les termes de degré  $s < r$ .

**EXEMPLE 4.2** Cas de deux valeurs propres  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda \neq 0$ . (Dans la littérature, un point ayant au maximum une valeur propre nulle est appelé semi-hyperbolique).

On peut donc, modulo un changement de coordonnées supposer la partie linéaire diagonale  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ . On va utiliser  $x$  et  $y$  pour les coordonnées, plutôt que  $x_1$  et  $x_2$ . Dans la première équation les termes résonants sont de la forme  $x^m$ ,  $m \geq 2$ , et dans la deuxième de la forme  $x^s y$ ,  $s \geq 1$ . Donc, la forme normale est donnée par

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sum_{i=p}^r a_i x^i + O(|(x, y)|^{r+1}), \\ \dot{y} &= y(\lambda + \sum_{i=1}^{r-1} b_i x^i) + O(|(x, y)|^{r+1}).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Supposons maintenant que  $a_p \neq 0$ . Sous cette forme, on peut voir l'organisation des trajectoires. On a trois organisations topologiques possibles :

- un col-noeud si  $p$  est pair ;
- un col topologique si  $p$  est impair et  $a_p \lambda < 0$  ;
- un nœud topologique si  $p$  est impair et  $a_p \lambda > 0$ .

#### 4.2.2 Forme normale avec paramètres

On peut toujours transformer une famille de systèmes  $\dot{X} = v_\epsilon(X)$  en dimension  $n$  dépendant d'un multi-paramètre  $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$  en un système de dimension  $p + n$  en ajoutant les équations  $\dot{\epsilon}_1 = 0, \dots, \dot{\epsilon}_p = 0$ . On considère la forme normale de la famille de systèmes au voisinage d'une valeur particulière du multi-paramètre que, sans perte, de généralité, on peut supposer être  $\epsilon = 0$ . On considère donc des changements de coordonnées inversibles pour  $\epsilon$  assez petit. Bien sûr, les équations  $\dot{\epsilon}_1 = 0, \dots, \dot{\epsilon}_p = 0$  sont déjà linéaires et il suffit d'appliquer la théorie précédente aux  $n$  premières équations. Les termes non résonants dans le système pour  $\epsilon = 0$  le demeurent pour  $\epsilon$  petit. Quant aux monômes résonants de la forme  $x_1^{m_1} \dots, x_n^{m_n}$ , tous leurs multiples de la forme  $x_1^{m_1} \dots, x_n^{m_n} \epsilon_1^{s_1} \dots \epsilon_p^{s_p}$  le sont aussi. Donc, en pratique, ces monômes auront des coefficients dépendant de  $\epsilon$ .

**EXEMPLE 4.3** *Considérons un système de classe  $C^m$  dépendant d'un multi-paramètre  $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$  qui, pour  $\epsilon = 0$ , a un point singulier à l'origine de valeurs propres  $\pm i\omega_0$ , où  $\omega_0 > 0$ . En coordonnées complexes  $z = x + iy$ , on peut supposer que la matrice du linéarisé en 0,  $A$ , est diagonale pour  $\epsilon = 0$ . Considérons l'équation  $v_\epsilon(X) = 0$ . On a  $v_0(0) = 0$  et  $\frac{\partial v}{\partial X}|_{(X, \epsilon) = (0, 0)} = A$  est inversible. Par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage  $V$  de  $X = 0$ , un voisinage  $W$  de  $\epsilon = 0$  et une fonction  $f : W \rightarrow V$  de classe  $C^m$ , tels que  $v_\epsilon(X) = 0$  pour  $(X, \epsilon) \in V \times W$  si et seulement si  $X = f(\epsilon)$ . Donc, pour tout  $\epsilon$ , le système a un unique point singulier qui est une fonction de classe  $C^m$  des paramètres. Par une translation de coordonnées  $X \mapsto X_1 = X - f(\epsilon)$ , la nouvelle famille de systèmes a un point singulier à l'origine. Regardons maintenant le linéarisé  $A(\epsilon)$ . Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique  $\det(\lambda I - A) = 0 = p(\lambda, \epsilon)$ . On a  $p(\pm i\omega_0, 0)$  et  $\frac{\partial p}{\partial \lambda}(\pm i\omega_0, 0) \neq 0$  car les racines sont simples. On en déduit par le théorème des fonctions implicites que les*

valeurs propres dépendent de manière  $C^m$  de  $\epsilon$ . En particulier, elles sont non nulles pour  $\epsilon$  petit puisqu'égales à  $\pm i\omega_0$  pour  $\epsilon = 0$ . Donc,  $A(\epsilon)$  est diagonalisable pour  $\epsilon$  petit, de valeurs propres  $\eta(\epsilon) \pm i\omega(\epsilon)$  où  $\eta(0) = 0$  et  $\omega(0) = \omega_0 \neq 0$ . Par un changement linéaire de coordonnées on peut donc ramener le système sous la forme (en coordonnées complexes) :

$$\dot{z} = (\eta(\epsilon) + i\omega(\epsilon))z + \sum_{j+k=2}^r a_{jk}z^j\bar{z}^k + O(|z|^{r+1}).$$

On peut ensuite appliquer le processus de mise sous forme normale et ne garder que les termes résonants de la forme  $z^{j+1}\bar{z}^j$ . Le système aura la forme

$$\dot{z} = (\eta(\epsilon) + i\omega(\epsilon))z + \sum_{j=1}^k c_j(\epsilon)z^{j+1}\bar{z}^j + O(|z|^{2k+2}).$$

L'avantage de cette forme est qu'elle permet d'étudier la naissance de cycles limites lorsque les valeurs propres traversent l'axe imaginaire. C'est le phénomène de la bifurcation de Hopf que nous discuterons plus tard.

EXEMPLE 4.4 La forme normale d'une famille de systèmes ayant pour  $\epsilon = 0$  un point semi-hyperbolique est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=0}^r a_i(\epsilon)x^i + O(|(x, y)|^{r+1}), \\ \dot{y} &= y(\lambda(\epsilon) + \sum_{i=1}^{r-1} b_i(\epsilon)x^i) + O(|(x, y)|^{r+1}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Si  $a_0(0) = \dots = a_{p-1}(0) = 0$  et  $a_p(0) \neq 0$ , on peut, par une translation de la coordonnée  $x$  se ramener au cas  $a_{p-1} = 0$ . Voyons un exemple

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\epsilon + x^2, \\ \dot{y} &= y. \end{aligned} \quad (4.11)$$

On a trois portraits de phase différents suivant que  $\epsilon < 0$ ,  $\epsilon = 0$  et  $\epsilon > 0$ . En  $\epsilon > 0$ , on a deux points singuliers : un col et un nœud. Ceux-ci se confondent pour  $\epsilon = 0$  en un col-nœud, et ont disparu pour  $\epsilon < 0$ . Comme nous l'avons vu dans l'exemple 4.3, le théorème des fonctions implicites garantit que les points singuliers ne peuvent disparaître lorsque les valeurs propres sont non nulles. Le nombre de points singuliers d'un système peut varier seulement quand au moins une des valeurs propres est nulle.

### 4.2.3 Le cas où $A$ n'est pas diagonalisable

Dans ce cas, il n'existe pas de méthode générale pour écrire le résultat et chaque cas particulier doit être étudié à la main.

Nous allons montrer une manière de procéder pour le cas d'un point singulier d'un système de dimension 2 dont la matrice du linéarisé est nilpotente.

**EXEMPLE 4.5 Le cas d'un point singulier de matrice du linéarisé nilpotente :**  
 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Nous allons étudier quels sont les termes de degré 2 dont on peut se débarrasser lors de la mise sous forme normale et quels sont ceux que l'on doit garder. Une base de  $H_2$  est donnée par

$$\left\{ h_1 = \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, h_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, h_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, h_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

On doit donc calculer les  $L_A(h_i)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , et regarder quel est le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

$$\begin{aligned} L_A(h_1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= h_1' A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A h_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2h_2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

De même,

$$\begin{aligned} L_A(h_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} = h_3, \\ L_A(h_3) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \\ L_A(h_4) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = -h_1 + 2h_5, \quad (4.13) \\ L_A(h_5) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy \\ y^2 \end{pmatrix} = h_6 - h_2, \\ L_A(h_6) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2 \\ 0 \end{pmatrix} = -h_3. \end{aligned}$$

Donc,  $L_A(H_2)$  est de dimension 4. Il est engendré par  $\{h_2, h_3, h_1 - 2h_5, h_6\}$ . Puisque nous pouvons nous débarrasser de tous les termes dans l'image de  $L_A$ , on reste avec des termes non linéaires dans un complément de dimension 2. On a un choix pour ce complément. Par exemple, il peut être engendré par  $\{h_1, h_4\}$  ou  $\{h_4, h_5\}$ . Donc, un système non linéaire peut, au voisinage d'un point singulier nilpotent se ramener, au choix, à une des deux formes

$$\dot{x} = y + bx^2, \quad (4.14)$$

$$\dot{y} = ax^2, \quad (4.15)$$

ou

$$\dot{x} = y, \quad (4.16)$$

$$\dot{y} = ax^2 + cxy. \quad (4.17)$$

Déjà ces formes normales nous apprennent quelque chose : si  $a \neq 0$ , on connaît l'organisation des trajectoires au voisinages du point singulier qui, dans la littérature, est



appelé un cusp. Si, de plus,  $b \neq 0$  ou, de manière équivalente,  $c \neq 0$ , en plongeant le système dans une famille à deux paramètres de systèmes, on peut décrire tous les portraits de phase de systèmes « voisins » de celui-ci. C'est la bifurcation de Bogdanov-Takens.



# Chapitre 5

## Théorie des bifurcations

### 5.1 Introduction

La théorie des bifurcations étudie le changement qualitatif des portraits de phase d'équations différentielles ordinaires dépendant de paramètres lorsque les paramètres passent par des *valeurs de bifurcations*.

Dans la théorie des bifurcations, on veut souvent parler de systèmes proches d'un système donné. On introduit donc une distance sur les systèmes. Cette distance dépend de la classe de différentiabilité choisie.

**DÉFINITION 5.1** 1. La norme d'une fonction  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  en classe  $C^s$  sur  $U$  est le nombre

$$\|v\|_{U,s} = \max_{X \in U} \max\{|v(X)|, |Dv(X)|, \dots, |D^s v(S)|\},$$

s'il existe

2. La distance de deux fonctions  $v, w : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  en classe  $C^s$  sur  $U$  est le nombre

$$d_{U,s}(v, w) = \|v - w\|_{U,s}$$

s'il existe.

### 5.2 La bifurcation de Hopf d'ordre $k$

Nous montrons ici le théorème général de la bifurcation de Hopf d'ordre  $k$ . Ce théorème est généralement donné dans le cas  $k = 1$ .

**THÉORÈME 5.2** On considère un champ de vecteurs  $v(X)$  de classe  $C^{2k+2}$  sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^2$  ayant un point singulier à l'origine pour lequel la matrice jacobienne a deux valeurs propres imaginaires pures  $\pm i\omega \neq 0$ . Supposons que la forme normale à l'ordre  $2k + 1$  soit donnée par

$$\dot{Z} = i\omega Z + c_1 Z^2 \bar{Z} + c_2 Z^3 \bar{Z}^2 + \dots + c_k Z^{k+1} \bar{Z}^k + O(|Z|^{2k+2})$$

et que  $Re(c_1) = \dots = Re(c_{k-1}) = 0$ ,  $Re(c_k) \neq 0$ . (On dit alors que l'origine est un foyer faible d'ordre  $k$ .) Alors,

1. Pour toute famille de champs  $v_\lambda(X)$  dépendant d'un multi paramètre  $\lambda$  sur un ouvert  $\mathcal{U}'$  de  $\mathbb{R}^m$  et telle que  $v_0 = v$ , il existe un voisinage  $V$  de l'origine dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\delta > 0$  tels que, pour tout  $\lambda \in B(0, \delta)$ , alors  $v_\lambda$  a au plus  $k$  cycles limites dans  $V$ .
2. Il existe  $\rho > 0$  tel que  $B(0, \rho) \subset \mathcal{U}$  et tel que, pour tout  $\ell \in \{0, \dots, k\}$ , pour tout  $0 < \rho' \leq \rho$  et pour tout  $\eta > 0$ , il existe un champ de vecteurs  $w \ll \text{proche} \gg$  de  $v$  sur  $B(0, \rho')$ , c'est-à-dire tel que  $d(v, w)_{B(0, \rho'), 2k+2} < \eta$ , tel que  $w$  a exactement  $\ell$  cycles limites dans  $B(0, \rho')$ .

PREUVE

1. On peut amener la famille  $v_\lambda$  sous forme normale

$$\dot{Z} = (a_0(\lambda) + i\omega(\lambda)Z + c_1(\lambda)Z^2\bar{Z} + \dots + c_k(\lambda)Z^{k+1}\bar{Z}^k + O(|Z|^{2k+2})).$$

On passe aux coordonnées polaires en posant  $Z = re^{i\theta}$ . Si  $c_j(\lambda) = a_j(\lambda) + ib_j(\lambda)$ , le système devient

$$\begin{aligned} \dot{r} &= a_0(\lambda)r + a_1(\lambda)r^3 + \dots + a_k(\lambda)r^{2k+1} + O(r^{2k+2}), \\ \dot{\theta} &= \omega(\lambda) + b_1(\lambda)r^2 + \dots + b_k(\lambda)r^{2k} + O(r^{2k+1}), \end{aligned} \quad (5.1)$$

où  $a_j(0) = 0$  pour  $0 \leq j < k$  et  $a_k(0) \neq 0$ . Puisque  $\dot{\theta} > 0$  pour  $r$  assez petit, on voit que pour  $r$  assez petit, on a une application de premier retour de Poincaré,  $P$ , définie sur le demi-axe  $x$  positif. Les cycles limites sont donnés par les points fixes isolés de l'application de premier retour de Poincaré, donc on va s'occuper de calculer cette application  $P$ .

Pour cela, on va regarder comment  $r$  varie en fonction de  $\theta$  en divisant la première équation de (5.1) par la seconde

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \alpha_0 r + \alpha_1 r^3 + \dots + \alpha_k r^{2k+1} + O(r^{2k+1}), \quad (5.2)$$

où les  $\alpha_j$  dépendent de  $\lambda$  et le reste dépend de  $\theta$  et  $\lambda$ . Se convaincre de la forme de cette expression demande un peu de travail. Puisque  $a_0(0) = \dots = a_{k-1}(0)$ , et  $a_k(0) \neq 0$ , alors on a

$$\alpha_0(0) = \dots = \alpha_{k-1}(0) = 0, \quad \alpha_k(0) \neq 0. \quad (5.3)$$

On cherche la solution sous la forme d'une série

$$r(\theta, r_0) = \sum_{j=1}^{2k+1} u_j(\theta)r_0^j + O(r_0^{2k+2}) \quad (5.4)$$

sous la condition initiale  $r(0) = r_0$ , ce qui correspond à  $u_1(0) = 1$ ,  $u_j(0) = 0$  pour  $j > 1$ . L'équation (5.4) nous donne

$$\frac{dr}{d\theta} = \sum_{j=1}^{2k+1} u_j'(\theta)r_0^j + O(r_0^{2k+2}) \quad (5.5)$$

On substitue cette expression dans le membre de gauche de (5.2) et on substitue (5.4) dans le membre de droite de (5.2). On obtient une suite d'équations différentielles pour les  $u_j$  :

$$\begin{aligned}
u_1' &= \alpha_0 u_1, & u_1(0) &= 1, \\
u_2' &= \alpha_0 u_2, & u_2(0) &= 0, \\
u_3' &= \alpha_0 u_3 + 3\alpha_1 u_1^3, & u_3(0) &= 0, \\
&\vdots & & \\
u_j' &= \alpha_0 u_j + Q_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{[\frac{j}{2}]}, u_1, \dots, u_{j-1}), \\
&\vdots & & \\
u_{2k+1}' &= \alpha_0 u_{2k+1} + Q_{2k+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, u_1, \dots, u_{2k})
\end{aligned} \tag{5.6}$$

où  $Q_j$  est un polynôme en  $\alpha_1, \dots, \alpha_{[\frac{j}{2}]}, u_1, \dots, u_{j-1}$  et

$$Q_{2k+1}(\alpha_1, \alpha_k, u_1, \dots, u_{2k}) = \alpha_k u_1^{2k+1} + R(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, u_1, \dots, u_{2k}).$$

Chacune des équations différentielle est linéaire, et sa solution peut être trouvée par la méthode de la variation des constantes, une fois que la solution des équations précédentes est connue. Ainsi,

$$\begin{aligned}
u_1(\theta) &= e^{\alpha_0 \theta}, \\
u_2(\theta) &\equiv 0, \\
u_3(\theta) &= \frac{3\alpha_1}{2\alpha_0} (e^{3\alpha_0 \theta} - e^{\alpha_0 \theta}), \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Dans le cas particulier où  $\lambda = 0$  on obtient la solution

$$\begin{aligned}
u_1(\theta) &\equiv 1, \\
u_2(\theta) &\equiv 0, \\
&\vdots \\
u_{2k}(\theta) &\equiv 0, \\
u_{2k+1}(\theta) &= \alpha_k(0)\theta,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

qui suit de (5.3).

L'application de premier retour de Poincaré est donnée par

$$P(r_0) = r(2\pi, r_0) = \sum_{j=1}^{2k+1} u_j(2\pi) r_0^j + O(r_0^{2k+2})$$

et on a que  $u_{2k+1}(2\pi) \neq 0$  pour  $\lambda$  assez petit. Les points fixes de  $P$  sont donnés par les zéros de l'application déplacement

$$\Delta(r_0) = P(r_0) - r_0.$$

On voit facilement qu'il existe  $\epsilon, \delta > 0$  tels que

$$\frac{d^{2k+1}\Delta}{dr_0^k} \neq 0$$

si  $|r_0| < \epsilon$  et  $|\lambda| < \delta$ . Par le théorème de Rolle on en conclut que  $\Delta$  a au plus  $2k+1$  zéros dans  $|r_0| < \epsilon$ . Un de ces zéros correspond au point singulier à l'origine. Les autres zéros apparaissent par paires  $(-r_0, r_0)$ , à cause de la symétrie du système sous  $(r, \theta) \mapsto (-r, \theta + \pi)$  et chaque paire correspond à un unique cycle limite. Donc, le système au plus  $k$  cycles limites coupant l'axe  $x$  dans l'intervalle  $]-\epsilon, \epsilon[$ .

2. On va procéder en  $\ell$  étapes successives : à chaque étape on modifie le champ de manière à lui ajouter un cycle limite. On le fait de manière suffisamment subtile pour ne pas défaire les cycles construits aux étapes précédentes. On pose  $v = v_0$  et  $\rho$  est choisi pour que  $v_0$  n'ait pas de cycles dans  $B(0, \rho)$ . Soit  $0 < \rho' \leq \rho$ . Si on veut que la perturbation soit à distance inférieure à  $\eta$  de  $v_0$ , à chaque étape on construira une perturbation  $v_j$  à distance inférieure à  $\eta/k$  de la perturbation précédente  $v_{j-1}$ . On commence par le cycle extérieur. Écrivons les détails dans le cas  $\text{Re}(c_k) < 0$ . Alors l'origine est asymptotiquement stable. De par la forme de  $v_0 = v$ , il existe  $0 < r_0 < \rho'$  tel que  $\dot{r}|_{r=r_0} < 0$ . On prend une perturbation

$$v_1 = v_0 + \epsilon_{k-1} Z^k \bar{Z}^{k-1}.$$

Le nombre  $\epsilon_{k-1}$  est choisi positif et suffisamment petit pour que  $\dot{r}|_{r=r_0} < 0$  pour  $v_1$ . D'autre part, de par la forme de  $v_1$ , il existe  $0 < r_1 < r_0$  tel que  $\dot{r}|_{r=r_1} > 0$  pour  $v_1$ . Par le théorème de Poincaré-Bendixson,  $v_1$  a un cycle limite dans l'anneau  $r_1 < r < r_0$ .

Pour le deuxième cycle on prend

$$v_2 = v_1 + \epsilon_{k-2} Z^{k-1} \bar{Z}^{k-2}.$$

Le nombre  $\epsilon_{k-2}$  est choisi négatif et suffisamment petit pour que  $\dot{r}|_{r=r_0} < 0$  et  $\dot{r}|_{r=r_1} > 0$  pour  $v_2$ . D'autre part, de par la forme de  $v_2$ , il existe  $0 < r_2 < r_1$  tel que  $\dot{r}|_{r=r_2} < 0$  pour  $v_2$ . Par le théorème de Poincaré-Bendixson,  $v_2$  a deux cycles limites, un dans l'anneau  $r_1 < r < r_0$  et un dans l'anneau  $r_2 < r < r_1$ .

On itère jusqu'à ce qu'on ait obtenu le nombre de cycles voulus.  $\square$

La preuve donnée précédemment suggère une famille particulière à  $k$  paramètres indépendants pour déformer le champ  $v_0$ , soit la famille  $v_\epsilon = v_0 + w_\epsilon$ , où

$$(w_\epsilon) = \begin{pmatrix} \epsilon_0 x + \epsilon_1 x(x^2 + y^2) + \dots + \epsilon_{k-1} x(x^2 + y^2)^{k-1} \\ \epsilon_0 y + \epsilon_1 y(x^2 + y^2) + \dots + \epsilon_{k-1} y(x^2 + y^2)^{k-1} \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

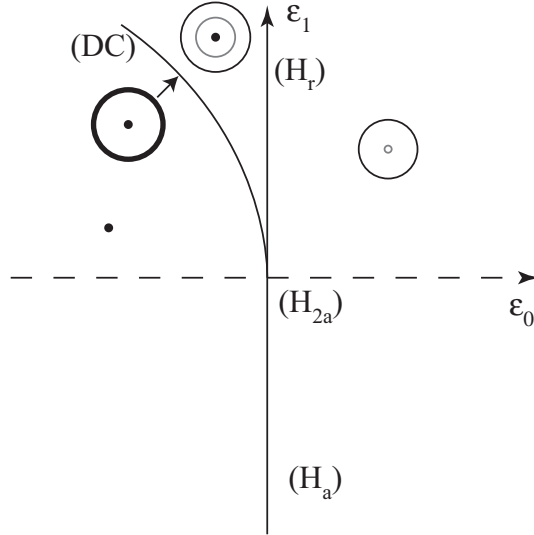


FIGURE 5.1 – Le diagramme de bifurcation du système (5.10) dans le cas  $k = 2$  et  $\text{Re}(c_2) < 0$ .  $(H_a)$  et  $(H_r)$  dénote la bifurcation de Hopf d'ordre 1 attractive ou répulsive.  $(H_2)$  et  $(H_{2r})$  dénote la bifurcation de Hopf d'ordre 2 attractive. Les cycles attractifs sont représentés en noir et les cycles répulsifs en gris. Les points attractifs sont noirs et pleins, alors que les points répulsifs sont gris et vides. Un double cycle attractif de l'extérieur et répulsif de l'intérieur est dessiné en trait gras.

appelée *déformation universelle*, parce que tout champ suffisamment proche de  $v_0$  est topologiquement orbitalement équivalent à un des champs de la famille  $v_\epsilon$ .

Le diagramme de bifurcation de la famille  $v_\epsilon$  ne dépend (topologiquement) que du signe de  $\text{Re}(c_k)$ . Il est le même que celui de la famille modèle

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \epsilon_0 x + \epsilon_1 x(x^2 + y^2) + \dots + \epsilon_{k-1} x(x^2 + y^2)^{k-1} \pm x(x^2 + y^2)^k, \\ \dot{y} &= \epsilon_0 y + \epsilon_1 y(x^2 + y^2) + \dots + \epsilon_{k-1} y(x^2 + y^2)^{k-1} \pm y(x^2 + y^2)^k. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Les figures 5.1 et 5.2 donnent ces diagrammes de bifurcation dans les cas  $\text{Re}(c_2) < 0$  et  $\text{Re}(c_2) > 0$ . Ces figures illustrent pourquoi la bifurcation de Hopf d'ordre le plus élevé « organise » le diagramme de bifurcation. Dans la littérature, on dira que le point de bifurcation dont l'ordre est le plus élevé est le centre organisateur du diagramme de bifurcation. On voit qu'au voisinage des bifurcations de Hopf d'ordre plus grand que 1 naissent des courbes ou surfaces de bifurcation correspondant à des doubles cycles (soit des points fixes doubles de l'application de premier retour de Poincaré). Numériquement, on peut donc décider de suivre ces courbes ou surfaces.

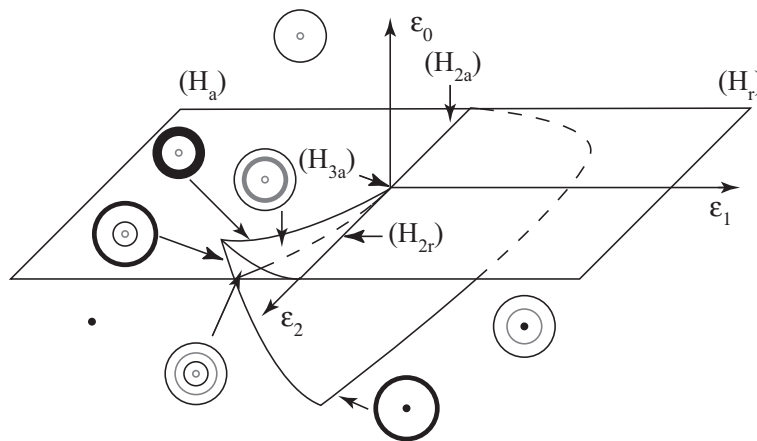


FIGURE 5.2 – Le diagramme de bifurcation du système (5.10) dans le cas  $k = 3$  et  $\text{Re}(c_3) < 0$ .  $(H_a)$  et  $(H_r)$  dénote la bifurcation de Hopf d'ordre 1 attractive ou répulsive.  $(H_{j_a})$  et  $(H_{j_r})$  dénote la bifurcation de Hopf d'ordre  $j$  attractive ou répulsive. Les cycles attractifs sont représentés en noir et les cycles répulsifs en gris. Les points attractifs sont noirs et pleins, alors que les points répulsifs sont gris et vides. Un double cycle attractif de l'extérieur et répulsif de l'intérieur (resp. attractif de l'intérieur et répulsif de l'extérieur) est dessiné en trait gras noir (resp. gris). Un cycle triple attractif est dessiné en trait noir très gras.



EXEMPLE 5.3 En 1979 Shi Songling a donné l'exemple suivant de système quadratique avec 4 cycles limites :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x - y - 10x^2 + (5 + \delta)xy + y^2, \\ \dot{y} &= x + x^2 + (-25 + 8\epsilon - 9\delta)xy,\end{aligned}\tag{5.11}$$

où  $\lambda = -10^{-200}$ ,  $\epsilon = -10^{-52}$  et  $\delta = -10^{-13}$ . Les coefficients  $\lambda, \delta, \epsilon$  de ce système sont si petits qu'il est impossible de voir numériquement ces quatre cycles limites. Mais à cause de leur petite taille il est tentant de voir ce qui se passe si  $\lambda = \delta = \epsilon = 0$ . On voit alors que l'origine est un foyer faible. Si on calcule les coefficients de la forme normale (en utilisant un logiciel de manipulations symboliques) on trouve que  $\text{Re}(c_1) = \text{Re}(c_2) = 0$  et  $\text{Re}(c_3) > 0$ . Effectivement, en perturbant le système avec  $\delta$ , on crée un premier cycle en se ramenant au cas  $\text{Re}(c_1) = 0$ ,  $\text{Re}(c_2) < 0$ . Ensuite en perturbant le système avec  $\epsilon$  tel que  $|\epsilon| \ll |\delta|$ , on crée un deuxième cycle en se ramenant au cas  $\text{Re}(c_1) > 0$ . Finalement, la perturbation en  $\lambda$  tel que  $|\lambda| \ll |\epsilon|$  transforme l'origine en foyer attractif et crée le troisième cycle. Mais, où se trouve le quatrième cycle ? Pour répondre à la question on étudie le portrait de phase du système (5.11). Pour simplifier les calculs on les fera pour  $\lambda = \delta = \epsilon = 0$ , puisque ces paramètres sont si petits qu'ils n'ont que peu d'influence, sauf à l'origine.

Cherchons les points singuliers.  $\dot{y}$  s'annule pour  $x = 0$  ou  $1 + x - 25y = 0$ . Remplaçons dans  $\dot{x} = 0$ . Si  $x = 0$ , on obtient les deux points singuliers  $P_1 = (0, 0)$  et  $P_2 = (0, 1)$ . Si  $y = \frac{1+x}{25}$ , alors  $\dot{x} = \frac{1}{625}[-6124x^2 + 102x - 24] < 0$  pour tout  $x$ . On voit donc que, sur la droite  $1 + x - 25y = 0$ , le flot est horizontal et dirigé vers la gauche (voir figure 5.3).

On a déjà étudié le type de  $P_1$ . En calculant la matrice jacobienne en  $P_2$ , on vérifie que  $P_2$  est un foyer répulsif.

On va montrer que le quatrième cycle se trouve autour de  $P_2$ . Ceci se fait en utilisant le théorème de Poincaré-Bendixson. Mais, pour trouver un domaine annulaire autour de  $P_2$  dans lequel rentrent les trajectoires, il faut étudier le système à l'infini ! Pour cela on compactifie le système par la compactification de Poincaré.

### La compactification de Poincaré d'un champ polynomial

On considère un champ polynomial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y),\end{aligned}\tag{5.12}$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes de  $\mathbb{R}[x, y]$ , dont le maximum des degrés est  $n$ . La compactification de Poincaré s'obtient ainsi. On identifie  $\mathbb{R}^2$  au plan  $z = -1$  dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Ce plan est tangent au pôle sud à la sphère unité  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . On projette un point  $(x, y, -1)$  sur la sphère par le centre de la sphère. C'est donc le point

$$(x', y', z') = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \right)\tag{5.13}$$

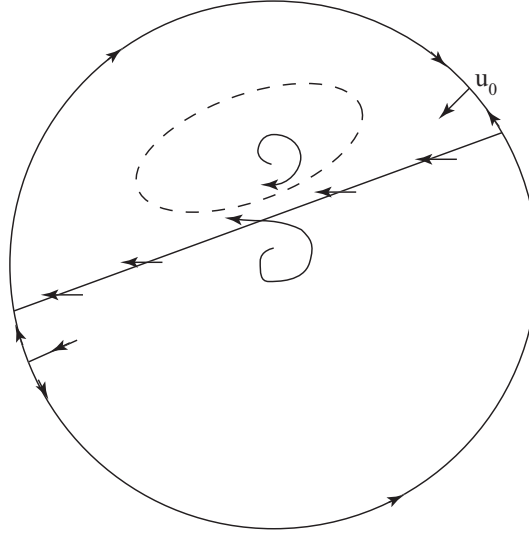


FIGURE 5.3 – Le portrait de phase du système de Shi Songling pour  $\lambda = \epsilon = \delta = 0$ .

de l'hémisphère inférieur. Les directions à l'infini (correspondant aux différents angles  $\theta \in [0, 2\pi[$  en coordonnées polaires) correspondent aux points de l'équateur. Cette projection envoie le champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$  sur un champ de vecteurs tangents à la sphère. Pour étudier ce qui se passe à l'infini, on utilise des cartes : on projette sur le plan  $x = 1$ . Ceci nous permet d'étudier toutes les directions à l'infini, sauf la direction  $x = 0$ . Pour étudier ce qui se passe dans cette dernière direction, on projette sur le plan  $y = 1$ . En pratique on va éliminer l'étape intermédiaire de la sphère et passer directement du plan  $z = -1$  au plan  $x = 1$  ou  $y = 1$ .

La projection d'un point  $(x', y', z')$  par le centre de la sphère sur le plan  $x = 1$  est donnée par  $\left(1, \frac{y'}{x'}, \frac{z'}{x'}\right)$ . Si  $(x', y', z')$  est donné en (5.13), ceci donne la projection  $\left(1, \frac{y}{x}, \frac{1}{x}\right)$ . Considérant que  $(x, y)$  sont les coordonnées de  $(x, y, -1)$  sur le plan  $z = -1$ , les coordonnées de l'image sur le plan  $x = 1$  sont

$$(u, z) = \left(\frac{y}{x}, \frac{1}{x}\right).$$

Dans ces coordonnées, le champ devient

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -uzP\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) + zQ\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right), \\ \dot{z} &= -z^2P\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right). \end{aligned} \tag{5.14}$$

L'infini correspond à  $z = 0$ . On a un problème car la vitesse est infinie pour  $z = 0$ . On lève l'indétermination en multipliant le champ par  $z^{n-1}$ . Qu'a-t-on fait en pratique dans le plan fini ? On a multiplié le champ de vecteurs par une fonction non nulle, ce qui revient à changer d'échelle sur le temps : on a donc changé les vecteurs du champ mais pas leur direction. Les courbes trajectoires du nouveau champ seront donc les mêmes.

(Dans la littérature, on introduit une relation d'équivalence sur les champs de vecteurs : deux champs  $v$  et  $w$  sur un même domaine  $U$  sont équivalents si  $w = fv$ , où  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction non nulle. Les classes d'équivalence de cette relation d'équivalence sont appelées *champs de directions*.)

Un autre détail important : si  $n$  est pair, alors  $z^{n-1}$  est négatif dans la région  $x < 0$ . Donc, dans cette région, on a inversé le sens des trajectoires. Le nouveau champ est donné par

$$\begin{aligned} u' &= -uz^n P\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) + z^n Q\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right), \\ z' &= -z^{n+1} P\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right), \end{aligned} \quad (5.15)$$

dans lequel on a noté les dérivées par rapport au temps comme  $(u', z')$  pour mettre en évidence que c'est la nouvelle coordonnée temporelle.

Il est facile de vérifier que  $z'|_{z=0} \equiv 0$ . Donc,  $z = 0$ , qui correspond à l'équateur de la sphère, est une courbe invariante sous le flot de (5.15). On analyse ses points singuliers qui sont les points singuliers de (5.15) situés sur  $z = 0$ .

On fait le même calcul dans la carte donnée par le plan  $y = 1$ . On laisse en exercice le fait de vérifier que les coordonnées sur ce plan sont données par

$$(v, w) = \left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right).$$

Dans ces coordonnées, le champ devient

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -vwQ\left(\frac{v}{w}, \frac{1}{w}\right) + wP\left(\frac{v}{w}, \frac{1}{w}\right), \\ \dot{z} &= -w^2Q\left(\frac{v}{w}, \frac{1}{w}\right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Comme précédemment on multiplie par  $w^{n-1}$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -vw^nQ\left(\frac{v}{w}, \frac{1}{w}\right) + w^nP\left(\frac{v}{w}, \frac{1}{w}\right), \\ \dot{z} &= -w^{n+1}Q\left(\frac{v}{w}, \frac{1}{w}\right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ici encore, l'infini, correspondant à  $w = 0$ , est invariant, et on analyse les points singuliers de (5.17) situés sur  $w = 0$ .

EXEMPLE 5.4 (Retour sur l'exemple 5.3) Faisons les calculs pour le champ (5.11). Ici encore pour simplifier, on prendra  $\lambda = \epsilon = \delta = 0$ . Dans la première carte à l'infini on prend  $(u, z) = \left(\frac{y}{x}, \frac{1}{x}\right)$ . Le système devient

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -uz \left( -\frac{u}{z} - \frac{10}{z^2} + \frac{5u}{z^2} + \frac{u^2}{z^2} \right) + z \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{25u}{z^2} \right), \\ \dot{z} &= -z^2 \left( -\frac{u}{z} - \frac{10}{z^2} + \frac{5u}{z^2} + \frac{u^2}{z^2} \right).\end{aligned}\quad (5.18)$$

Après multiplication par  $z$  et réarrangement des termes on obtient

$$\begin{aligned}u' &= -u^3 - 5u^2 - 15u + 1 + z(1 + u^2), \\ z' &= z(-u^2 - 5u + 10) + uz^2.\end{aligned}\quad (5.19)$$

Les points singuliers sont donnés par  $z = 0$  et  $p(u) = u^3 + 5u^2 + 15u - 1 = 0$ . En considérant le discriminant de  $p(u)$  (voir définition 5.5 et théorème 5.6 ci-dessous), on voit qu'il a une seule racine  $u_0$ , qui est positive. On veut étudier le type de ce point singulier. Pour cela, on regarde la matrice jacobienne du champ évaluée en ce point. Elle vaut

$$\begin{pmatrix} -3u_0^2 - 10u_0 - 15 & 1 + u_0^2 \\ 0 & -u_0^2 - 5u_0 + 10 \end{pmatrix}.$$

Les deux valeurs propres sont  $\lambda_1 = -3u_0^2 - 10u_0 - 15 < 0$  puisque  $u_0 > 0$  et  $\lambda_2 = -u_0^2 - 5u_0 + 10$ . Il faut étudier le signe de  $\lambda_2$ . On va utiliser que  $p(u_0) = 0$  et  $u_0 > 0$ . Alors,  $\lambda_2$  a le signe de  $u_0\lambda_2 + p(u_0) = 25u_0 - 1$ . Il faut donc déterminer le signe de  $25u_0 - 1$ . Remarquons que  $P(u) > 0$  si  $u > u_0$  et  $P(u) < 0$  si  $u < u_0$ . Calculons  $P(1/25) = -6124/15625 < 0$ . Donc,  $1/25 < u_0$  et  $25u_0 - 1 > 0$ . D'où  $\lambda_2 > 0$ , et le point  $(u_0, 0)$  à l'infini est un point de selle. Ce même calcul nous donne aussi la position relative de ce point par rapport au point à l'infini de la droite  $1 + x - 25y = 0$ .

Remarque : ce point correspond à deux points singuliers à l'infini diamétralement opposés, l'un à l'infini dans le quadrant  $x, y > 0$ , et l'autre dans le quadrant  $x, y < 0$ . Puisqu'on a multiplié le système initial par  $z$ , pour le système initial le sens des flèches est opposé pour les séparatrices correspondantes des deux points.

La deuxième carte ne donne pas de nouveau point singulier à l'infini.

En traçant le portrait de phase à l'infini et sur la droite  $1 + x - 25y = 0$ , on voit bien qu'on a un anneau de Poincaré-Bendixson autour du point  $(0, 1)$ , lequel contient un cycle limite.

En pratique, on choisit de représenter l'hémisphère inférieur par un disque dont le bord représente l'équateur (voir figure 5.3).

DÉFINITION 5.5 On considère un polynôme cubique

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c. \quad (5.20)$$

Le discriminant de  $p$  est l'expression

$$\Delta = a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c + 18abc - 27c^2. \quad (5.21)$$

(La fonction « discriminant » est implantée sur la plupart des logiciels de manipulations symboliques.)

THÉORÈME 5.6 On considère un polynôme cubique (5.20) à coefficients complexes, et  $\Delta$  son discriminant. Si  $\Delta = 0$ , alors  $p$  a une racine multiple (double ou triple), et si  $\Delta \neq 0$ , alors  $p$  n'a que des racines simples. De plus, si  $p$  est à coefficients réels,

- si  $\Delta < 0$ , alors  $p$  a une racine réelle et deux racines complexes conjuguées ;
- si  $\Delta > 0$ , alors  $p$  a trois racines réelles.

