MAT 2450: MATHÉMATIQUES ET TECHNOLOGIE

SUJETS DE PROJETS DE SESSION (hiver 2008)

I. Projets reliés au chapitre sur le positionnement

I.1 **Le fonctionnement d'un GPS: aspects relativistes.**

Pour quelqu'un qui a fait un cours de relativité générale, on peut traiter des aspects relativistes dans le GPS. Une bonne référence est "Exploring Black Holes, Introduction to General Relativity" Edwin F. Taylor and John Archibald Wheeler, Addison Wesley Longman, chapitres 1 et 2 et projet sur le GPS. Ces chapitres et le projet peuvent être téléchargés de

http://www.eftaylor.com/general.html.

I.2 **Quelques éléments de la théorie des projections.** Étude d'autres projections utilisées en cartographie, par exemple préservant les aires ou les angles. La cote GA 110 des bibliothèques de l'Université de Montréal correspond à des livres sur le sujet. On trouve entre autres les livres suivants à la bibliothèques des lettres et sciences humaines:

"Coordinate systems and map projections", par D.H. Mailing

"Les systèmes de projection et leurs applications", F. Reignier

"Map projections", P. Richardus et R. K. Adler.

On peut aussi regarder le système de coordonnées UTM:

http://cartes.rncan.gc.ca/index_f.php. En Amérique du Nord la plupart des cartes topographiques sont quadrillées à l'aide du système de coordonnées UTM: "Universal Transverse Mercator". Ce système a été élaboré par l'armée américaine pour éviter les difficultés de calcul avec le système de Mercator usuel.

II. Projets reliés aux chapitres sur les codes correcteurs d'erreurs et la cryptographie

II.1 **Compression de textes.**

Référence: http://www.math.princeton.edu/math_alive/index.shtml: Part 2 de Error correction and compression. (Christiane Rousseau en a une copie.)

D'autres sources peuvent être trouvées, par exemple en faisant une recherche sur le code de Huffman.

II.2 **Codes linéaires et codes de Reed-Müller.** Ce sont d'autres codes utilisant d'autres astuces que celles du code de Reed et Solomon. Référence: les références données dans le chapitre des codes correcteurs et "Codes détecteurs et codes correcteurs d'erreurs", par G. Cullmann, Éd. Dunod. Ces codes sont traités dans tout livre sur les codes correcteurs d'erreurs (voir Section QA 268 à la bibliothèque).

III. Projets reliés aux applications mathématiques dans les autres sciences

III.1 **La théorie des noeuds pour expliquer l'action des enzymes sur l'ADN.** Références: *La science des noeuds*, Dossier pour la science, No. 7615 (1997), Springer-Verlag (1977); C. Rousseau, *La théorie des noeuds en science*, Mathématiques d'hier et d'aujourd'hui, Collectif pour l'An 2000; De W. Sumners, *Untangling DNA*, Mathematical Intelligencer (1990) 71–80; L.H. Kauffman, site internet sur les noeuds :

`http://www.cs.ubc.ca/spider/scharein`.

III.2 **Pourquoi les saisons?** Un livre d'introduction à l'astronomie pourra y répondre. Soyez ambitieux: calculer à quelle hauteur s'élèvera le soleil au solstice d'hiver à Montréal? Quelle sera la durée du jour le plus long? Et à Helsinski? À l'équateur?

III.3 **Les polyèdres, le théorème d'Euler, les symétries des polyèdres et leurs applications dans la nature.** Cristaux polyédriques, cristallographie, fullerènes, etc. Comment répartir uniformément les trous sur une balle de golf? Un bon point de départ est

Fullerènes et polyèdres, Christiane Rousseau, que vous trouverez parmi les archives de la revue Accromαth à http://accromath.ca/

Pour les applications en chimie aux fullerènes voir DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Volume 51, "Discrete Mathematical Chemistry", DIMACS Workshop 1998. Pour la répartition des trous sur une balle de golf voir dossier Pour la Science "La sphère sous toutes ses formes", décembre 2003.

III.4 **Formes de la nature. La nature et les nombres.** Comment expliquer les spirales dans le coeur des fleurs de tournesol? Y a-t-il une équation donnant la spirale des coquilles d'escargots?

Références: *For all mathematical purposes*, partie V,

La nature et les nombres, Ian Stewart, Hachette,

La physique des spirales végétales par Stéphane Douady et Yves Couder, dans la Recherche 250, janvier 1992, volume 24, et S. Douady, Y. Couder, *Phyllotaxis as a Physical Self-Organized Growth Process*, Physical Review Letters, **68**, 2098-2101 (1992).

L'origine des formes, numéro spécial de la Recherche., No 305, janvier 1998.

"Pattern formation in biology, vision and dynamics", A. Carbone, M. Gromov et P. Prusinkievitcz, World Scientific, 2000.

"On growth and form" D'Arcy W. Thompson, Dover 1992.

"The golden ratio", M. Livio, Boardway Books, 2002.

"Geometry in Nature", V.L. Hansen. A. K. Peters, 1993. www.lenombredor.free.fr/nature.htm

http://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/biology.html où se trouve le chapitre *Equiangular spiral*.

III.5 **La forme des dunes de sable.** Voir

"Les formes de la vie" de Pour la Science, juillet-septembre 2004

"Les tas de sable", Gazette des mathématiciens, 65–82, 2002.

III.6 **Surfaces minimales et membranes cellulaires.** Voir

Dossier hors-série "Les formes de la vie" de Pour la Science, juillet-septembre 2004.

P.-G. de Gennes et al, "Gouttes, perles et ondes" Bélin, Paris, 2002.

I. Peterson "The mathematical tourist", W.H. Freeman and Co, 1998.

(Il est préférable d'avoir fait un cours de géométrie différentielle.)

IV. Différents aspects du traitement d'images

IV.1 **L'adaptation pratique de la compression d'images par les systèmes de fonctions itérées.** Article de J. Kominek, "Advances in fractal compression for multimedia applications", Multimedia Systems (1997), 5: 255-270.

IV.2 **Nettoyage d'images par morphologie mathématique.** Référence:

http://web.ccr.jussieu.fr/urfist/image_numerique/chapitre3_7.htm; beaucoup de sites web. Ne pas utliser de présentations toutes faites existant sur la Toile.

IV.3 **Compression des empreintes digitales.** Voir http://www.c3.lanl.gov/ brislawn/FBI/FBI.html pour une description du standard utilisé par le FBI. Il vous faudra trouver d'autres sources mathématiques.

IV.4 **Recherche de contours dans une photographie.** Un algorithme de base en analyse d'images numériques : comment tracer le contour d'un objet sur une photographie. Un des algorithmes est basé sur la notion de gradient que vous avez vu en MAT 1400. A essayer sur une photographie contrastante. Voici un point de départ :

Handbook of image and video processing, Al Bovik (ed.), Academic Press (2000). (Voir le chapitre 4.11.)

V. Quelques applications des probabilités

V.1 **La loi de Benford en probabilités ou "Comment repérer des fraudeurs?".** Références:

- D. Knuth, "The Art of Computer Programming".
- Article de Jean-Paul Delahaye, "L'étonnante loi de Benford", Pour la Science. no 351, 2007.
- Article de Theodore Hill "Le premier chiffre significatif fait sa loi", Dossier hors-série de la Recherche "L'Univers des nombres", Août 1999.

V.2 **Quels sont les bons générateurs de nombres aléatoires?** Le chapitre "Générateurs de nombres aléatoires" décrit des algorithmes pour engendrer des nombres aléatoires. Plusieurs tests de nature statistique peuvent être utilisés pour en mesurer la nature véritablement aléatoire. Voir l'article "ensbs.pdf" de Pierre L'Écuyer du Département d'informatique et de recherche opérationnelle de l'Université de Montréal (`http://www.iro.umontreal.ca/~lecuyer/`) et le livre

Knuth, D.E., *The Art of Computer Programming, vol.2: Seminumerical Algorithms*, Addison-Wesley (1998).

V.3 **Graphes avec distribution en loi de puissance.**

Pour étudier la grande toile, les chercheurs font souvent une hypothèse sur la distribution des liens du réseau : une page a k liens avec u ne probabilité proportionnelle à une certaine puissance α de l'inverse de k ($1/k^\alpha$). Cette hypothèse, en fait, est étendue à plusieurs autres graphes utilisés en modélisation. Par exemple, pour modéliser la transmission de maladies sexuelles, les chercheurs font l'hypothèse que les adultes ont k partenaires sexuels avec une probabilité proportionnelle à $1/k^\alpha$ pour un certain α. Quelles sont les propriétés de ces graphes? Quelle est leur utilité?

VI. Quelques applications en génie

VI.1 **Les montagnes russes et la conception des manèges.**

VII. Projets reliés aux applications mathématiques dans les sciences médicales

VII.1 **Épidémies.** pouvons-nous modéliser le développement des maladies? Pouvons-nous évaluer le nombre de personnes infectées au cours du temps? Ce sont des questions qui ont préoccupé les scientifiques depuis longtemps. (Est-il utile de rappeler que les plus grandes épidémies ont tué au cours des siècles plus de gens que les grandes guerres?) Une introduction se trouve dans le chapitre *SIR model for spread of disease* sur la page

http://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/epidemiology.html. Et voici une référence avancée : D.J. Daley, J. Gani, *Epidemic Modelling*, Cambridge University Press (1999).

VII.2 **Une introduction à la théorie du chaos.** Le mieux est d'étudier l'exemple de l'application logistique.

Références pour commencer: chapitre 20 de "Dynamical systems with applications using Maple", par S. Lynch, Birkhaüser, 2001. Aussi article de Mitchell Feigenbaum "Universal behaviour in nonlinear sciences" dans le volume "Universality in chaos" par P. Cvitanović (ce volume est à la bibliothèque: QC 174.84 U54 1984.)

Les références suivantes donnent des applications de la théorie du chaos. *La théorie du chaos*, J. Gleick, Champs Flammarion, 1989, ISBN 2-08-081218-X, *Le chaos*, Dossier hors-série Pour la Science, janvier 1995. Pour les applications *Nonlinear Dynamics in Physiology and Medicine* (Editors: Anne Beuter, Leon Glass, Michael C. Mackey, Michle S. Titcombe), *Nonlinear Dynamics And Chaos With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering* par S. H. Strogatz, Addison-Wesley, 1994, *When times breaks down*, A. T. Winfree, Princeton University Press, 1987, *Theory of Heart*, L. Glass, P. Hunter et A. McCulloch, Springer Verlag, 1991.

VIII. Projets reliés aux applications mathématiques dans les sciences humaines et à l'environnement

VIII.1 **Modélisation de la croissance des populations dans un environnement sous contraintes.** Une population avec des ressources de nourriture sans limite, d'espace illimité et sans prédateurs a tendance à croître exponentiellement. La croissance de la plupart des populations cependant (même les populations humaines) est soumise à des contraintes. Comment modéliser leur croissance?

Un point de départ possible : l'étude de l'équation logistique (c'est une équation aux différences). Une référence est le chapitre 6 de "Differential equations" par Blanchard, Devaney et Hall, section 6.1-6.4. On peut aussi modéliser à partir d'équations différentielles: partir des exemples de la section 1.1 et de la section 2.1 du livre ci-dessus.

Aussi http://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/biology.html où se trouve le chapitre *Logistic growth model*.

Le lien *Birth, Growth, Death and Chaos* sur la page

http://www.math.princeton.edu/math_alive/index.shtml

VIII.2 **Existe-t-il des "élection idéales"?** Les élections pour nos représentants provinciaux et fédéraux sont basées sur une des méthodes les plus simples (simplistes?) de recueillir les désirs du peuple. Le citoyen y est appelé à exprimer *un* choix; ce citoyen développera souvent une tactique, sachant par exemple que son premier choix n'a pas de chance mais que son second offre sans doute un compromis acceptable. Existe-t-il des meilleures façons de recueillir le vote populaire? Voici une question qui a intéressé les mathématiciens (et les politologues) depuis plus de deux siècles. Le mathématicien et politicien français Condorcet (1743-1794) est une des premières figures marquantes de ce domaine. Le théorème d'Arrow illustre la difficulté du problème. Commencer vos recherches bibliographiques par

http://www.math.princeton.edu/math_alive/index.shtml suivi de *Voting and social choice*.

L'article suivant contient trois preuves courtes du théorème d'Arrow:

http://cowles.econ.yale.edu/P/cd/d11a/d1123-r3.pdf

IX. Quelques problèmes d'optimisation ou de géométrie combinatoire

IX.1 **L'empilement des sphères et ses applications.** Voir

Dossier Pour la Science "La sphère sous toutes ses formes", décembre 2003.

I. Peterson, "Islands of truth", W.H. Freeman and co., New York 1990.

George G. Szpiro, "Kepler's conjecture", John Wiley & Sons, 2003.

Thomas Hales, "Cannonballs and honeycombs", Notices of the American Mathematical Society, Volume 47 (2000), No 4, 440-440.

Aussi page personnelle de Thomas Hales: http://www.math.pitt.edu/∼thales/

IX.2 **Construction de pavages du plan ou classification de pavages.** Les exercices 10, 11 et 12 du chapitre Frises et mosaïques suggèrent des défis qui feront de bons projets. Il s'agit des classifications de pavages archimédiens du plan (exercice 10), des pavages archimédients de la sphère (exercice 11) et des mosaïques du plan (exercice 12). L'énoncé des exercices est un bon point de départ. Voici quand même d'autres références.

Le chapitre 18 du livre "For all practical purposes" dans la collection COMAP explique entre autres comment inventer des pavages du plan.

IX.3 **Pavages du plan hyperbolique.**

Artful mathematics: the heritage of M. C. Escher, par D. Dunham, Notices of the AMS, volume 50, no 4 (2003). 452-455, ainsi que les références contenues dans cet article.

IX.4 **Finir une gravure d'Escher.** Voir

Artful mathematics: the heritage of M. C. Escher, par B. de Smit et H. W. Lenstra, Notices of the AMS, volume 50, no 4 (2003). 446-451. Aussi

http://escherdroste.math.leidenuniv.nl/,

http://bergeron.math.uqam.ca/Escher.pdf

Mystérieuse lithographie d'Escher, Accromath, volume 4, été-automne 2009, à http://accromath.ca

IX.5 **Mathématiques et Origami.** Référence: "Project Origami", Thomas Hull, A.K. Peters Ltd, 2006.

IX.6 **Les diagrammes de Voronoï.** Ces diagrammes qui constituent une partition du plan avec n points spécifiés en n polygones convexes sont appliqués dans la théorie des communications sans fil. Références: "Graphes et hypergraphes, Claude Berge, Dunod, Paris 1975. "Applications of Voronoi diagrams", John Wiley & Sons, 1992. "Coloring ordinary maps, maps of empire and maps of the moon", Mathematics Magazine, vol. 66 (1993), 211–225. "Frequently asked questions in polyhedral computations", par K. Fukuda, www.ifor.math.ethz.ch/staff/fukuda/polyfaq.html

Le site http://www.langorigami.com/ est maintenu par un des spécialistes mondiaux (tant du pliage que de la science!).

"Geometric folding algorithms: linkages, Origami and polyhedra", Erik D. Demaine et Joseph O'Rourke, Cambridge University Press, 2007.

IX.7 **Est-il possible d'identifier des faux de grands artistes peintres?** Une application de la dimension fractale à l'étude des œuvres du peintre américain Jackson Pollock. Commencer par

Richard P. Taylor, *Order in Pollock's chaos*, Scientific American, Décembre 2002, p. 116.