

Plan du cours MAT 3060

LOGIQUE

Automne 2018

Professeure

Christiane Rousseau, bureau 5231, tél : 343-7729, rousseac@dms.umontreal.ca

Objectifs

L'objectif du cours est d'introduire aux principaux chapitres de la logique et à leur importance dans le développement des mathématiques et de l'informatique.

La première partie du cours porte sur le calcul propositionnel. On le traitera de deux manières. La partie informelle ou sémantique porte sur le sens : les propositions peuvent être vraies ou fausses. À partir des relations qui les lient, on peut décider si d'autres propositions sont vraies ou fausses. Les formules toujours vraies seront les tautologies. Dans la partie formelle ou syntaxique, on se donnera des axiomes de départ et une règle de déduction, le modus ponens permettant de construire des théorèmes. On réconciliera les deux points de vue en montrant que les tautologies coïncident avec les théorèmes du calcul propositionnel.

Quelles sont maintenant les propositions qui nous intéressent ? On veut que ce soit des énoncés qui ont une signification mathématique. Cette signification et la validité de l'énoncé dépendra des blocs de construction de ces énoncés. Dans le langage courant, nos énoncés sont des phrases. On introduira, de même, la notion de langage mathématique du premier ordre, dont les phrases seront des énoncés mathématiques. Comme nos phrases qui sont construites à partir de mots et de règles d'agencement des mots, ces énoncés mathématiques seront construits de manière récursive à partir d'éléments de base. Ces éléments sont des objets mathématiques, des propriétés qui peuvent ou non être vérifiées par ces objets, ces propriétés étant appelées des prédicats. On utilisera également des connecteurs logiques et des quantificateurs : \forall et \exists . La deuxième partie du cours portera donc sur le calcul des prédicats. La partie sémantique ou informelle portera sur l'interprétation des formules bien formées d'un langage du premier ordre. Les formules vraies dans toute interprétation du langage seront dites logiquement valides. Dans la partie syntaxique, on introduira un système déductif

formel avec des axiomes, et deux règles de déduction permettant d'en déduire des théorèmes. On réconciliera les deux points de vue en montrant que les formules bien formées logiquement valides coïncident avec les théorèmes du système déductif formel.

On considérera ensuite quelques systèmes formels du premier ordre : système avec égalité, théorie des groupes, arithmétique du premier ordre, théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel. On montrera que tout système du premier ordre cohérent a un modèle. On effleura les résultats de Gödel sur l'incomplétude de l'arithmétique du premier ordre en donnant les grandes idées de sa preuve. Enfin, si le temps le permet, on effleura la notion de calculabilité en lien avec la thèse de Church et les travaux de Turing. On insistera alors surtout sur la signification des résultats.

Horaire du cours

- a) Lundi 10h30 – 12h30, salle Z-210, Pav. Claire-McNicoll jusqu'au 24 septembre inclus, et ensuite salle 1175, Pav. André-Aisenstadt. Note : il n'y a pas de cours le lundi 1er octobre à cause des élections.
- b) Jeudi 11h30 – 12h30, salle 1175, Pav. André-Aisenstadt.

Sujets traités

Ce sont essentiellement les cinq premiers chapitres du manuel du cours.

1. Calcul propositionnel informel : formules bien formées du calcul propositionnel, tables de vérité, tautologies et contradictions.
2. Calcul propositionnel formel : axiomatisation du calcul propositionnel, théorèmes du calcul propositionnel. Théorème de déduction. Formes normales conjonctive et disjonctive. Théorème d'intégrité. Extensions cohérentes et complètes. Théorème d'adéquation.
3. Calcul informel des prédicats : langage du premier ordre et formules bien formées. Interprétations et valuations. Formules vraies dans une interprétation. Formules logiquement valides.
4. Calcul formel des prédicats : axiomes, tautologies et théorèmes du système formel déductif. Théorème d'intégrité. Formules démontrablement équivalentes. Forme normale prénexe. Extensions cohérentes et complètes. Théorème d'adéquation.
5. Quelques systèmes formels du premier ordre : système avec égalité, théorie des groupes, arithmétique du premier ordre, théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel.

6. Aperçu du théorème d'incomplétude de Gödel et grandes idées de la preuve.
7. Aperçu de la notion de calculabilité (si le temps le permet).

Évaluation

- Examen intra comptant pour 40 % le lundi 15 octobre 2018, 10h30 à 12h30, salle 1175, Pav. André-Aisenstadt.
- Devoir à remettre le lundi 5 novembre, comptant pour 10 %. Étant donné que trois lundis sautent dans le trimestre à cause des élections et des deux congés de la Fête du Travail et de l'Action de Grâce, le devoir portera sur une partie de la matière que vous aurez à lire par vous même.
- Examen final cumulatif comptant pour 50 % le lundi 17 décembre 2018 de 9h00 à 12h00, salle 1175, Pav. André-Aisenstadt.
- Les étudiants inscrits au Bureau de Soutien aux Étudiants en Situation de Handicap (BSESH) désirant bénéficier de mesures d'accommodement aux examens (intra et final) sont priés de consulter le lien suivant pour connaître la procédure à suivre : <https://safire.umontreal.ca/reussite-et-ressources/mesures-daccommodement-aux-examens-pour-les-etudiants-en-situation-de-handicap/>

Site internet du cours

Le site internet du cours est le
<http://www.dms.umontreal.ca/~rousseac/MAT3060.html>

Manuel du cours

Le manuel du cours est *Logic for mathematicians* de Alan G. Hamilton, publié par Cambridge University Press. Il est obligatoire. Il est en vente à la librairie des presses au pavillon Roger-Gaudry au coût de 121,95\$. Comme le manuel est en anglais, de brèves notes de cours contenant essentiellement un recueil des définitions et énoncés des propositions et théorèmes sans leurs preuves seront disponibles sur le site du cours.

Quelques rappels du règlement pédagogique

- La date limite pour modifier votre choix de cours est le 19 septembre 2018. C'est aussi la date limite pour abandonner le cours sans frais.
- La date limite pour abandonner le cours est le 9 novembre 2018.

- Vous êtes dans l'obligation de motiver une absence prévisible à une évaluation dès que vous êtes en mesure de constater que vous ne pourrez être présent(e). Il appartiendra à l'autorité compétente de déterminer si le motif est acceptable.
- Le plagiat : attention, c'est sérieux ! Vous êtes invité à consulter le site www.integrite.umontreal.ca.